
Transformadas de Fourier y de Laplace

3.1. Introducción

Los dominios del tiempo y de la frecuencia son formas alternativas de representar las señales. Si una señal es modificada en un dominio, también lo será en el otro. Los problemas que plantea el procesamiento de señales pueden tratarse en el dominio del tiempo con técnicas clásicas de ecuaciones diferenciales (señales analógicas) o ecuaciones en diferencias (señales discretas), mientras que en el dominio de la frecuencia estos problemas se traducen en ecuaciones algebraicas generalmente más sencillas de resolver. Por ejemplo, en la lección anterior hemos visto que la convolución (una operación complicada) de dos señales discretas en el dominio del tiempo se corresponde con el producto (una operación muy sencilla) de sus Transformadas de Fourier Discretas en el dominio de la frecuencia.

Las herramientas que establecen las relaciones matemáticas entre los dominios del tiempo y de la frecuencia se llaman *transformadas*. Dos de las más usadas son la transformada de Fourier y la transformada de Laplace y ambas están relacionadas. La transformada de Fourier se usa para representar en el dominio de la frecuencia señales continuas y describe el espectro continuo de una señal no periódica.

Los métodos basados en la transformada de Fourier son usados prácticamente en todas las áreas de la ciencia y de la ingeniería: óptica, diseño de circuitos, cristalografía y espectroscopía, procesamiento de señales y comunicaciones, tratamiento de imágenes.

3.2. La transformada de Fourier

Lo que sigue es un intento de motivar la definición de transformada de Fourier que daremos posteriormente. No nos preocuparemos mucho por la precisión matemática pues

se trata de ayudar a la intuición.

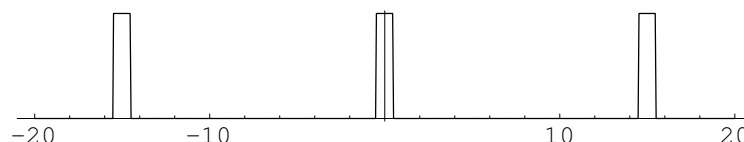
La transformada de Fourier puede interpretarse como una “*versión continua*” del concepto de serie de Fourier para funciones no periódicas. Recuerda que el espectro de una señal f , periódica de período T , es el conjunto de pares $\{(n/T, c_n) : n \in \mathbb{Z}\}$, donde c_n son los coeficientes de Fourier complejos de f . Para nuestros propósitos actuales, es conveniente considerar la función \hat{f} dada por $\hat{f}(n/T) = c_n$. Observa que la gráfica de dicha función es justamente el espectro de f .

La clave de lo que sigue consiste en interpretar una función no periódica como el límite de una función periódica cuyo período, T , se hace arbitrariamente grande, es decir, $T \rightarrow +\infty$. Observa que cuanto mayor es el período T más cerca están los puntos del espectro de forma que cuando $T \rightarrow +\infty$ podemos considerar que el espectro se convierte en una curva continua y la función \hat{f} en una función definida en \mathbb{R} cuya gráfica es dicha curva. Veamos todo esto con un ejemplo.

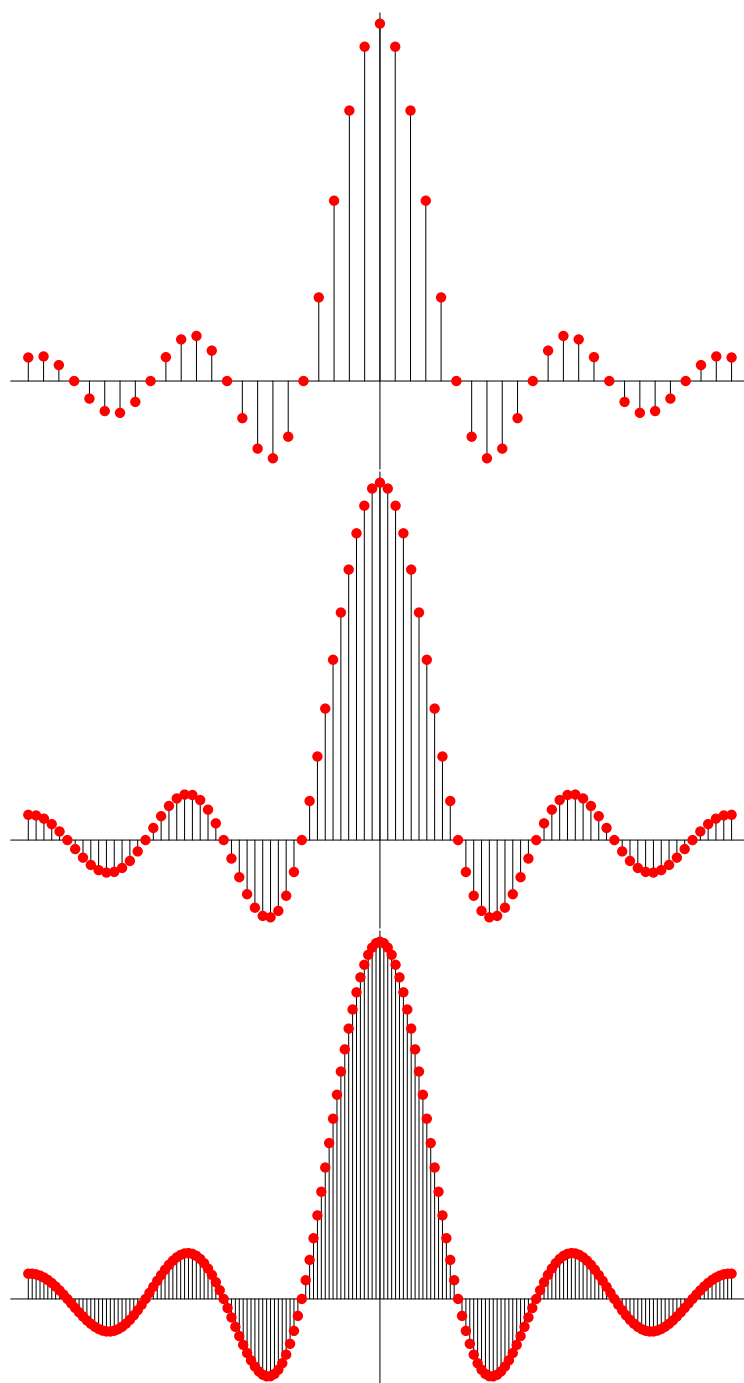
Consideremos la función “pulso rectangular” definida por:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Es claro que Π no es una función periódica y, por ello, no tiene una serie de Fourier asociada. No obstante, podemos considerar versiones periódicas de Π repitiendo su parte no nula separada regularmente por grandes intervalos en los que la función es cero. Aquí tienes la gráfica de la periodización de Π con período 15.



Como las periodizaciones de Π son funciones pares y reales sus coeficientes de Fourier son reales. Aquí tienes los gráficos de los espectros correspondientes a las periodizaciones de Π con períodos 5, 10 y 20.



Calculemos los coeficientes de Fourier de la periodización de Π con período T .

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}\left(\frac{n}{T}\right) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi i n t/T} \Pi(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t/T} dt = \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{-2\pi i n/T} e^{-2\pi i n t/T} \right]_{t=-1/2}^{t=1/2} = \frac{1}{2\pi i n} (e^{\pi i n/T} - e^{-\pi i n/T}) = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right)\end{aligned}$$

Deducimos que

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi i n t/T} \Pi(t) dt = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\frac{\pi n}{T}}$$

Haciendo ahora $T \rightarrow +\infty$ en esta expresión podemos interpretar que la variable discreta n/T se convierte en una variable continua s con lo que resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} \Pi(t) dt = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$$

Bien, acabamos de obtener la transformada de Fourier de la función Π . Aquí puedes ver su gráfica.

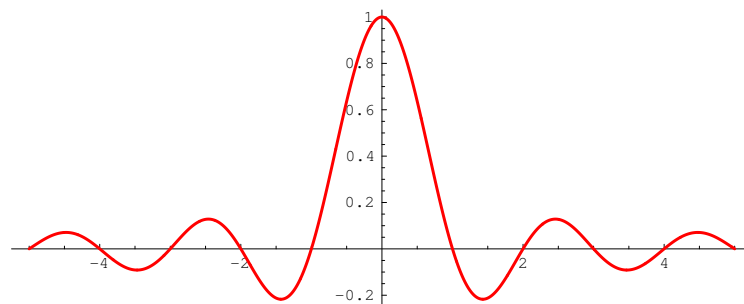


Figura 3.1: La función $\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t}$

Definición 3.1. La transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es la función $\widehat{f} = \mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$\widehat{f}(s) = \mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) dt \quad (s \in \mathbb{R}) \quad (3.1)$$

Comentarios

- Usaremos las notaciones \widehat{f} y $\mathcal{F}f$ para representar la transformada de Fourier de la señal f . A veces conviene escribir $\mathcal{F}f$ en la forma $\mathcal{F}(f)$ para indicar claramente que $\mathcal{F}f$ es la transformada de Fourier de la función f .

- El parámetro “ s ” en la definición 3.1 se interpreta como frecuencias. La función \hat{f} se interpreta como la representación de la señal f en el dominio de la frecuencia.
- La transformada de Fourier convierte una señal, $f(t)$, dada en el dominio del tiempo en otra señal, $\hat{f}(s)$, en el dominio de la frecuencia.
- Representaremos por $L^1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Para que la definición 3.1 tenga sentido es condición suficiente que $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- Para calcular la transformada de Fourier de una función tenemos libertad para modificar como queramos dicha función en un conjunto siempre que ello no afecte al valor de la integral. Por ejemplo, podemos cambiar el valor de la función en cualquier conjunto finito de puntos. Por eso, para calcular la transformada de Fourier de una función no es imprescindible que la función esté definida en todo \mathbb{R} , es suficiente, por ejemplo, que esté definida en todo \mathbb{R} excepto en un conjunto finito de puntos.
- No hay acuerdo unánime sobre la definición de la transformada de Fourier. Algunos detalles sobre los que los distintos autores no se ponen de acuerdo son: el signo en la exponencial, multiplicar la integral por $1/2\pi$ o por $1/\sqrt{2\pi}$, incluir o no incluir 2π en el exponente de la exponencial.

3.2.1. La transformada inversa de Fourier

La transformada de Fourier permite analizar una señal f por sus componentes de frecuencia. El conjunto $\Omega(f) = \{s \in \mathbb{R} : \hat{f}(s) \neq 0\}$ se llama espectro continuo de la señal f . Cada frecuencia $s \in \Omega(f)$ tiene como amplitud $|\hat{f}(s)|$ y su fase es $\arg \hat{f}(s)$. La señal f queda caracterizada completamente por \hat{f} en el sentido de que el conocimiento de \hat{f} permite recuperar f . Veamos de manera informal cómo puede hacerse esto.

Consideremos que f es una señal que se anula fuera de un intervalo acotado lo que permite considerar su periodización para valores grandes del período T de manera que $f(t) = 0$ para $|t| > T/2$. Desarrollemos dicha periodización en serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}$$

Teniendo en cuenta que $f(t) = 0$ para $|t| > T/2$, los coeficientes de Fourier de f vienen dados por:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt = \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)$$

Pongamos $s_n = n/T$. Sustituyendo el valor de c_n en la serie obtenemos:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(s_n) e^{2\pi i s_n t}$$

Como los puntos s_n están igualmente espaciados una distancia $1/T$, podemos interpretar esta suma como una suma de Riemann de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{2\pi i s t} ds$$

Cuando $T \rightarrow +\infty$ podemos esperar que se tenga la igualdad:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{2\pi i s t} ds$$

Llegamos así a la siguiente definición.

Definición 3.2. La transformada inversa de Fourier de una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es la función $\check{g} = \mathcal{F}^{-1}g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$\check{g}(t) = \mathcal{F}^{-1}g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} g(s) ds \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3.2)$$

Tenemos también el siguiente teorema.

Teorema 3.3 (de inversión de Fourier). Si f es una señal continua tal que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y también $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, se verifica que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} \widehat{f}(s) ds \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3.3)$$

La igualdad 3.1 se llama la *ecuación de análisis* y la igualdad 3.3 se llama *ecuación de síntesis*. Observa que la ecuación de síntesis permite reconstruir una señal no periódica a través de sus componentes de frecuencia y puede verse como una “versión continua” de la representación de una señal periódica por su serie de Fourier.

Explícitamente, la igualdad 3.3 afirma que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s u} f(u) du \right] e^{2\pi i s t} ds \quad (3.4)$$

Evidentemente, es más cómodo escribir esta igualdad en la forma:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) \quad (3.5)$$

Es notable la simetría que hay entre la transformada de Fourier y su inversa: solamente se diferencian por un cambio de signo en la exponencial. De hecho, se verifica también la igualdad:

$$g = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g) \quad (3.6)$$

La transformada de Fourier es una operación que regulariza y suaviza las funciones. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

Teorema 3.4. La transformada de Fourier de una señal integrable, $f \in L^1(\mathbb{R})$, es una función continua, acotada y $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}f(s) = 0$.

Observación

Hay versiones más generales del teorema de inversión en las que se permite que la función f tenga algunas discontinuidades finitas de salto. Cuando esto ocurre, la función $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)$ en dichas discontinuidades tiene un valor igual a la semisuma de los correspondientes límites laterales. Por ello, aunque para calcular la transformada de Fourier de una función tenemos libertad para modificar dicha función en algunos puntos, cuando queremos recuperar una función que tiene discontinuidades de salto a partir de su transformada de Fourier, es imprescindible regularizar dicha función definiéndola en dichas discontinuidades igual a la semisuma de los límites laterales correspondientes.

3.2.2. Propiedades de la transformada de Fourier

Algunas de las propiedades que siguen son generales, es decir, se satisfacen solamente con la hipótesis de que las funciones que en ellas intervienen estén en $L^1(\mathbb{R})$ para que sus correspondientes transformadas estén definidas. Otras propiedades requieren hipótesis adicionales en las que no vamos a entrar. Te aconsejo que aprendas estas propiedades como un formalismo útil para calcular transformadas de Fourier. Para ello tendrás que memorizar las transformadas de Fourier de unas pocas funciones básicas y a partir de ellas aplicando las propiedades que siguen, *sin necesidad de calcular integrales*, podrás deducir las transformadas de Fourier de muchísimas funciones más.

Linealidad. La transformada de Fourier es un operador lineal. Esto quiere decir que si α y β son números y f, g señales, se verifica la igualdad:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g$$

Propiedades de simetría

De las definiciones dadas para la transformada de Fourier y su inversa:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi s t) f(t) dt \\ \mathcal{F}^{-1}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi s t) f(t) dt\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que el coseno es par y el seno impar, se deducen las siguientes propiedades de simetría.

1. $\mathcal{F}f(s) = \mathcal{F}^{-1}f(-s)$.
2. **Regla de inversión.** $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(s) = f(-s)$.
3. Si la función f es par entonces se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi s t) f(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \sin(2\pi s t) f(t) dt = 0$$

por lo que

$$\mathcal{F}f(s) = \mathcal{F}^{-1}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st) f(t) dt = 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi st) f(t) dt$$

y la transformada de Fourier de f coincide con su transformada inversa y es una función par.

4. Análogamente, si f es impar su transformada de Fourier también es impar y:

$$\mathcal{F}f(s) = -\mathcal{F}^{-1}f(s) = i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi st) f(t) dt = 2i \int_0^{\infty} \sin(2\pi st) f(t) dt$$

5. Si f es real entonces $\mathcal{F}f(-s) = \overline{\mathcal{F}f(s)}$.
6. Si f es real y par su transformada de Fourier también es real y par.
7. Si f es real e impar su transformada de Fourier es impar y toma valores imaginarios puros.

Las siguientes dos propiedades se obtienen fácilmente con un sencillo cambio de variable.

Traslación en el tiempo. Dado un número $a \in \mathbb{R}$ y una señal f , definimos la señal $\tau_a f$ por:

$$\tau_a f(t) = f(t - a)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\tau_a f}(s) = e^{-2\pi i a s} \hat{f}(s)$$

Es decir, una traslación en el tiempo produce un cambio de fase en la transformada.

Cambio de escala o dilatación. Dado un número $a \in \mathbb{R}^*$ y una señal f , definimos la señal $\sigma_a f$ por:

$$\sigma_a f(t) = f(at)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\sigma_a f}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

Es decir una dilatación ($a > 1$) o una compresión ($a < 1$) en el dominio del tiempo se corresponde con una compresión o dilatación en el dominio de la frecuencia más un cambio de escala.

Propiedad de modulación. Dado $a \in \mathbb{R}$, y una señal f , se verifica que la transformada de Fourier de la función $g(t) = e^{2\pi i a t} f(t)$ es la función $\tau_a \hat{f}$.

Esta propiedad es inmediata pues:

$$\hat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) e^{2\pi i a t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (s-a)t} f(t) dt = \hat{f}(s-a)$$

La aplicación de la transformada de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales se basa en la siguiente propiedad.

Propiedad de derivación

$$\mathcal{F}(f')(s) = 2\pi i s \mathcal{F}f(s) \quad \mathcal{F}(-2i\pi t f(t))(s) = (\mathcal{F}f)'(s)$$

Igualdad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(s) \overline{\mathcal{F}g(s)} ds$$

En particular

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(s)|^2 ds$$

3.2.3. Ejemplos

La función pulso rectangular

Es la función dada por

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Para calcular su transformada de Fourier no es preciso definir dicha función en los puntos $\pm \frac{1}{2}$ pero, para recuperar esta función por medio de una transformada de Fourier es necesario definir su valor en dichos puntos igual a $1/2$. Como se trata de una función par su transformada de Fourier viene dada por:

$$\widehat{\Pi}(s) = 2 \int_0^{\infty} \Pi(t) \cos(2\pi s t) dt = 2 \int_0^{1/2} \cos(2\pi s t) dt = 2 \left[\frac{\sin(2\pi s t)}{2\pi s} \right]_{t=0}^{t=1/2} = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$$

La función “cardinal seno” o “función de muestreo”

Es la función dada para todo $t \in \mathbb{R}$ por

$$\text{senc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

por supuesto, $\text{senc}(0) = 1$. Su gráfica puedes verla en la figura 3.1.

La transformada de Fourier de esta función se deduce fácilmente de que, según acabamos de ver, $\widehat{\Pi} = \text{senc}$ y, como la función Π es par, obtenemos

$$\mathcal{F}\text{senc} = \mathcal{F}(\mathcal{F}\Pi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\Pi) = \Pi.$$

Decaimiento exponencial truncado

Es la función dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

Podemos calcular su transformada de Fourier directamente:

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{(-2\pi i s - 1)t} dt = \left[-\frac{e^{-t} e^{-2\pi i s}}{1 + 2\pi i s} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{1 + 2\pi i s}$$

La función de Laplace

Es la función dada por

$$g(t) = e^{-|t|}$$

Para calcular su transformada de Fourier observamos que $g(t) = f(t) + f(-t)$ donde f es el decaimiento exponencial truncado. Deducimos que:

$$\widehat{g}(s) = \widehat{f}(s) + \widehat{f}(-s) = \frac{1}{1 + 2\pi i s} + \frac{1}{1 - 2\pi i s} = \frac{2}{1 + 4\pi^2 s^2}$$

La función gaussiana unidad

Es la función definida por:

$$f(t) = e^{-\pi t^2}$$

Esta función tiene la notable propiedad de ser invariante para la transformada de Fourier: su transformada de Fourier es ella misma. Para calcularla podemos usar el hecho de que $f'(t) = -2\pi t f(t)$ y tomar transformadas de Fourier en ambos lados de esta igualdad con lo que, en virtud de la propiedad de derivación, resulta:

$$2\pi i s \widehat{f}(s) = \frac{1}{i} \widehat{f}'(s)$$

Es decir

$$\widehat{f}'(s) + 2\pi s \widehat{f}(s) = 0$$

Deducimos de aquí que la función $\widehat{f}(s) e^{\pi s^2}$ tiene derivada nula por lo que

$$\widehat{f}(s) = \widehat{f}(0) e^{-\pi s^2} = e^{-\pi s^2} = f(s)$$

Donde hemos usado el resultado bien conocido $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1$.

3.2.4. Ejercicios

1. Supongamos que reproduce en un magnetofón una cinta a velocidad doble de la velocidad a que se ha grabado. Interpreta lo que ocurre mediante la propiedad de cambio de escala o dilatación de la transformada de Fourier.
2. Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, calcula, sin hacer integrales, la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

$$a) \quad \Pi_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a/2 \\ 0, & |t| \geq a/2 \end{cases}$$

b) $f(t) = \Pi((t-b)/c)$ donde Π es la función “pulso rectangular”.

c) $f(t)$ es una función escalonada $f(t) = \sum_{k=1}^m a_k \Pi\left(\frac{x-b_n}{c_n}\right)$.

$$d) f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & x < 0 \text{ o } x > 2 \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & |t| < a/2 \\ 0, & |t| \geq a/2 \end{cases}$$

$$f) f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$g) f(t) = \cos(2\pi\beta t) e^{-\pi(x/\alpha)^2}$$

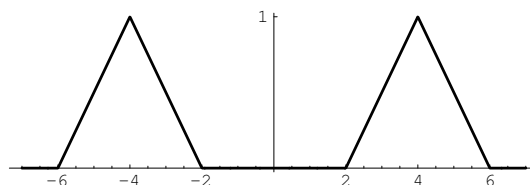
$$h) f(t) = \frac{1}{1+2\pi i t}$$

$$i) f(t) = 2t e^{-\pi t^2}$$

3. Calcula mediante integración la transformada de Fourier de la “función triángulo” definida por:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

4. a) Supuesto conocida la transformada de Fourier de una señal f , calcula la transformada de Fourier de la señal $g(t) = f(t) \cos(2\pi at)$.
b) Calcula la señal (en el dominio del tiempo) cuya transformada de Fourier tiene la gráfica siguiente.

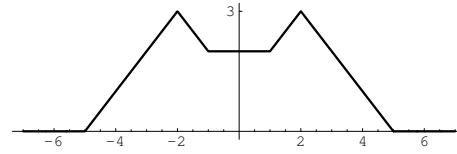
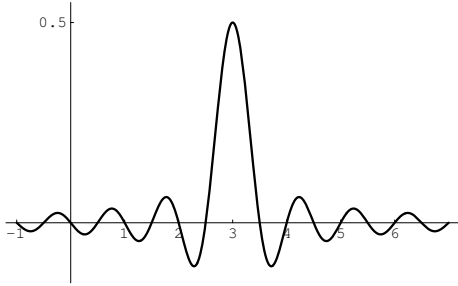


5. Supongamos que la señal $f(t)$ es nula fuera del intervalo $[-1/2, 1/2]$. Sea

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-n)$$

la periodización de f con período 1. Estudia la relación entre los coeficientes de Fourier de g y la transformada de Fourier de f .

6. Calcula las transformadas de Fourier de las funciones cuyas gráficas son las siguientes.



3.3. Convolución y transformada de Fourier

Procesar una señal consiste en modificar sus componentes de frecuencia. Si la señal es analógica y su transformada de Fourier es

$$\widehat{f}(s) = |\widehat{f}(s)| \operatorname{Arg} \widehat{f}(s)$$

podemos estar interesados en modificar las amplitud $|\widehat{f}(s)|$, o las fases $\operatorname{Arg} \widehat{f}(s)$ correspondientes a cada frecuencia s , para obtener una nueva señal que podemos representar en la forma:

$$\rho(s) |\widehat{f}(s)| e^{is \operatorname{Arg} \widehat{f}(s)}$$

donde la función $\rho(s) \geq 0$ da cuenta del cambio producido en la amplitud, y la función e^{is} da cuenta del cambio producido en la fase. Esto nos lleva a considerar la función $\rho(s) e^{is}$ y a concluir que $\widehat{f}(s) \rho(s) e^{is}$ es la transformación más general que podemos hacer sobre nuestra señal modificando amplitudes y fases. Es natural interpretar la función $\rho(s) e^{is}$ como la transformada de Fourier de una señal analógica $g(t)$, por tanto $g(t) = \mathcal{F}^{-1}(\rho(s) e^{is})(t)$, y a preguntarnos qué operación debemos hacer con las señales $f(t)$ y $g(t)$ para obtener una nueva señal cuya transformada de Fourier sea precisamente $\widehat{g}(s) \widehat{f}(s)$. Está claro que dicha operación será el modelo más general del procesamiento de señales. Calculemos $\widehat{g}(s) \widehat{f}(s)$.

$$\begin{aligned} \widehat{g}(s) \widehat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i s t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i s x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i s t} e^{-2\pi i s x} dt \right] f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i s(t+x)} dt \right] f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u-x) f(x) e^{-2\pi i s u} du \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x) e^{-2\pi i s u} dx \right] du = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x) dx \right] e^{-2\pi i s u} du \end{aligned}$$

Pero esto que hemos obtenido es justamente la transformada de Fourier de la función

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x) dx$$

Definición 3.5. La convolución de dos señales f y g es la función

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) f(x) dx \quad t \in \mathbb{R}$$

dicha función se representará por $f * g$ y se llama la convolución de f y g .

Deducimos de lo anterior el siguiente resultado que expresa que la convolución en el dominio del tiempo se corresponde con la multiplicación en el dominio de la frecuencia.

Teorema 3.6 (de convolución). $\mathcal{F}(f * g)(s) = \mathcal{F}f(s)\mathcal{F}g(s)$.

Teniendo en cuenta la simetría entre la transformada de Fourier y su inversa, también se verifica la igualdad:

$$\mathcal{F}^{-1}(f * g) = (\mathcal{F}^{-1}f)(\mathcal{F}^{-1}g)$$

y, lo que es más interesante:

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$$

es decir, la multiplicación en el dominio del tiempo se corresponde con la convolución en el dominio de la frecuencia.

¿Qué es la convolución?

Es la segunda vez que aparece en este curso la operación de convolución. En la lección anterior vimos la convolución cíclica de dos señales periódicas discretas y ahora surge la convolución de dos señales continuas no periódicas. Entre ambas hay ciertas analogías y ambas se comportan igual respecto a las respectivas transformadas de Fourier discreta o continua. No son estos los únicos tipos de convolución que se consideran. La convolución de funciones es una herramienta muy versátil que tiene distintos significados en distintos campos y no admite una interpretación única. Se trata de una operación que no es fácilmente visualizable y que tiene cierta complicación: para calcular el valor de la convolución de dos funciones en un solo punto hay que usar todos los valores de ambas funciones y realizar una integración. En la figura 3.2 tienes un intento de visualización del cálculo de la convolución de la función pulso rectangular, Π , consigo misma en el punto $x = 0.75$.

Observa que aunque la función pulso rectangular es discontinua en los puntos $\pm 1/2$ su convolución es la función triángulo que es continua. Esta es una propiedad importante de la convolución: *la convolución de dos funciones es una función al menos tan buena como la mejor de ambas*.

Podemos ver la convolución como una operación para promediar y suavizar una función por medio de otra. Consideremos que g es una función positiva, concentrada cerca de 0, con área total igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$$

Por ejemplo, g podría ser una campana de Gauss alta y estrecha centrada en 0. En tal caso, la función $x \mapsto g(t-x)$ está concentrada cerca de t y sigue teniendo área total 1. La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x) dx$$

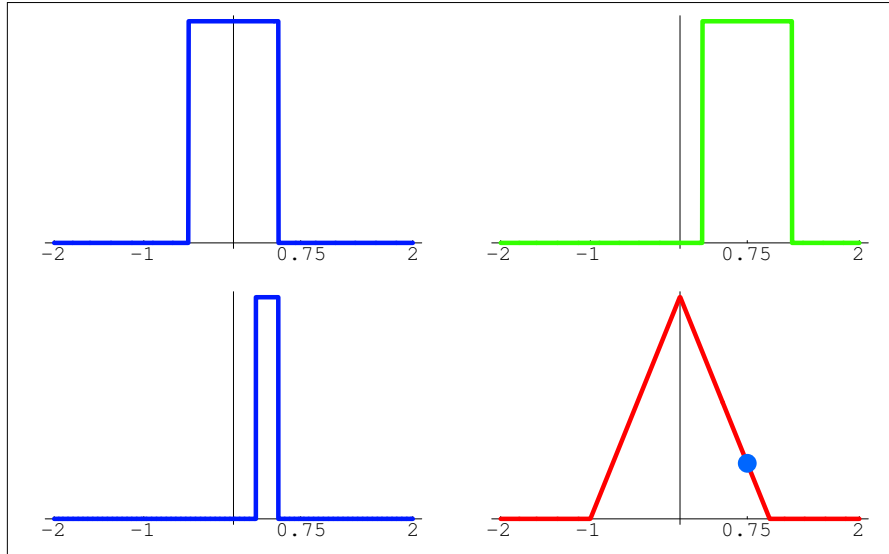


Figura 3.2: Gráficas de $\Pi(x)$ (azul), $\Pi(0.75 - x)$ (verde), $\Pi(x)\Pi(0.75 - x)$ (azul), $\Pi * \Pi(x)$ (rojo). El punto azul es el valor $\Pi * \Pi(0.75)$

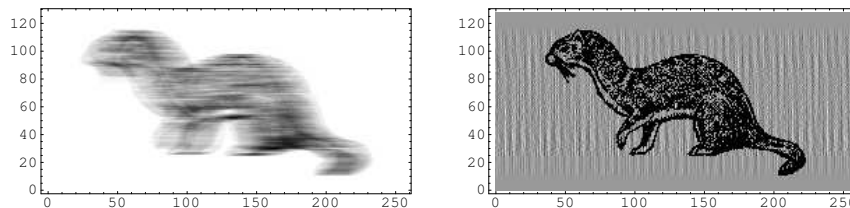
puede interpretarse como un *promedio* de los valores de $f(x)$ cerca de $x = t$ *ponderado* por los valores de $x \mapsto g(t - x)$. Si nos movemos a otro punto t' cercano a t y calculamos el valor, $f * g(t')$, de la convolución en t' , repetiremos la operación anterior, es decir, calcularemos una media ponderada de los valores de f cerca de t' y dicha media incluirá, si t' está cerca de t , valores de f que ya se usaron en el anterior promedio. Por ello, cabe esperar que los valores de la convolución $f * g(t)$ y $f * g(t')$ estén más próximos que $f(t)$ y $f(t')$. Es decir, $f * g(t)$ *suaviza* f .

Por otra parte, este proceso de *promediar* y *regularizar* es lo que hacen los instrumentos de medida. Por ejemplo, cuando usamos un termómetro para medir la temperatura en un punto del espacio lo que estamos midiendo realmente es un promedio. Eso se debe a que el termómetro no mide la temperatura solamente en un punto, sino que la información que proporciona es realmente un promedio de las temperaturas en una pequeña región del espacio. La manera de realizar este promedio depende de las características físicas del instrumento y dicho promedio se realiza de igual forma en cualquier punto donde situemos el termómetro. De esta forma se entiende que los datos que proporciona el termómetro son el resultado de una convolución de la función temperatura con otra función, que podemos interpretar como una función de densidad de probabilidad - una gaussiana -, que es característica del instrumento concreto que usamos. Cuanto más preciso sea el termómetro más alta y estrecha será esta gaussiana y más “*concentrada*” será la lectura que se realice.

Las razones anteriores explican por qué la convolución aparece en contextos tan diversos. En algunas aplicaciones como, por ejemplo, en restauración de imágenes, lo que se quiere es invertir el proceso antes descrito, es decir, se dispone de una señal f que está “contaminada” por su convolución con otra señal g de manera que lo que nosotros recibimos es la señal $h = f * g$. La señal g se interpreta como un “ruido” y pueden hacerse

hipótesis sobre su naturaleza para intentar separar la señal f del ruido g que la “contamina”. En estos casos lo que se quiere es invertir un proceso de convolución.

Aquí puedes ver dos fotografías de una comadreja. La primera de ellas está “corrida” debido a un pequeño movimiento de la cámara que tomó la foto. Esto es una convolución. La segunda es el resultado de someter los datos de la foto a una de-convolución.



Propiedades de la convolución

La operación de convolución se comporta de forma parecida a la multiplicación. Concretamente, se verifican las siguientes propiedades:

- **Conmutativa.** $f * g = g * f$.
- **Asociativa.** $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- **Distributiva.** $(f + g) * h = f * h + g * h$.

La última propiedad es inmediata y las otras dos son consecuencia fácil del teorema de convolución.

Llegados aquí es natural preguntarse si hay alguna función que sea la unidad para la convolución, es decir, una función δ que verifique que $f * \delta = f$ para toda función integrable f . Explícitamente, una tal función habría de verificar la igualdad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t-x) dx = f(t)$$

En particular, tomando $f(x) = \Pi(x/2\varepsilon)$, se sigue que debería ser:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1$$

para todo $\varepsilon > 0$. Está claro que no hay ninguna función en el sentido usual que verifique estas condiciones. Volveremos sobre esto más adelante.

3.3.1. Convolución y Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI)

Un **sistema** es cualquier proceso que transforma señales de entrada en señales de salida. En términos matemáticos, podemos representar un sistema por un operador L que al actuar sobre una señal x produce una señal y , lo que se escribe $y = Lx$.

Como puedes ver el concepto de “sistema” es muy general. Ejemplos de sistema son:

- Los instrumentos que usamos para comunicarnos: teléfonos, radios, televisores, cámaras fotográficas,... Todos ellos aceptan cierto tipo de señales de entrada y producen nuevas señales de salida.
- Todo proceso matemático en el que una función se transforme en otra. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales, la convolución con una función dada.

Se distinguen distintos tipos de sistemas según el tipo de señal de entrada y de salida. Los más interesantes para nosotros son:

- *Sistemas analógicos* los que transforman señales analógicas en señales analógicas.
- *Sistemas discretos* los que transforman señales discretas en señales discretas.

Para que un concepto tan general sea realmente útil hay que suponer que se cumplen ciertas propiedades.

Propiedades de los sistemas

- **Linealidad.** Se dice que un sistema L es lineal cuando es aditivo y homogéneo, es decir, cualesquiera sean las señales de entrada x e y y los números α, β se verifica que:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$$

Esta propiedad suele llamarse *principio de superposición*.

- **Invariancia en el tiempo.** Se dice que un sistema L es invariante en el tiempo si un adelanto o retraso de la señal de entrada produce el mismo efecto en la señal de salida.

Representando por $\tau_a x$ la señal $(\tau_a x)(t) = x(t - a)$, la invariancia en el tiempo se expresa por la igualdad:

$$L(\tau_a x) = \tau_a Lx$$

De manera más explícita, si es $y(t) = (Lx)(t)$ la señal transformada de x y es $z(t) = (L(\tau_a x))(t)$ la señal transformada de $\tau_a x$, se verifica que $z(t) = y(t - a)$.

- **Estabilidad.** Se dice que un sistema L es estable cuando es lineal y *continuo*. Matemáticamente esto se expresa por la igualdad (que en cada caso concreto debe dotarse de significado matemático preciso):

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Lx_n$$

Un sistema LTI es un sistema lineal invariante en el tiempo ¹. Un **filtro** es un sistema LTI que además es estable.

Nuestro propósito es ver que los filtros lo que hacen es una convolución de la señal de entrada con una función que se llama la *respuesta impulso* del filtro. Consideremos primero filtros discretos y después filtros analógicos.

Respuesta impulso de un filtro discreto

Representaremos las señales discretas por funciones definidas en \mathbb{Z} con valores en \mathbb{C} . Dadas dos señales $u, v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ se define su convolución como la señal z dada por

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)v(n-k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

supuesto, claro está, que dicha serie converge para todo $n \in \mathbb{Z}$. La señal z se llama la *convolución* de las señales u y v y se representa por $u * v$. Esta convolución de sucesiones tiene análogas propiedades a la convolución de funciones por medio de una integral.

La señal $\delta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\delta(n) = 0$ para $n \neq 0$ y $\delta(0) = 1$ se llama señal *impulso unidad* o señal *delta de Dirac² discreta*. Dada una señal discreta $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica la igualdad:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

pues dicha suma consta realmente de un único sumando no nulo que se obtiene para $k = n$. Representaremos por δ_k la función $\delta_k(n) = \delta(n-k)$, es decir, con la notación ya usada varias veces, $\delta_k = \tau_k \delta$. La igualdad anterior nos dice que la sucesión de funciones $x_N = \sum_{k=-N}^N x(k)\delta_k$ converge *puntualmente* a la función x .

Supongamos ahora que $L : X \rightarrow Y$ un filtro donde X e Y son espacios vectoriales normados de sucesiones y que se verifica que x_N converge a x en la norma de X (es decir, $\|x_N - x\| \rightarrow 0$). Entonces, la linealidad y continuidad de L permite escribir:

$$Lx = L\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N x(k)\delta_k\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N x(k)L\delta_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)L\delta_k$$

Como L es invariante en el tiempo se verifica que $L\delta_k = L(\tau_k \delta) = \tau_k(L\delta)$. Poniendo $y = Lx$, y llamando $h = L\delta$, la igualdad anterior nos dice que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica que:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(\tau_k h)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

¹También puede interpretarse LTI como “sistema lineal invariante por traslaciones” pues no siempre la variable es el tiempo y lo propio de un sistema LTI, además de la linealidad, es la invariancia por traslaciones de la variable ya sea esta continua o discreta.

²P. Dirac (1902-1984). Físico inglés que propuso la existencia de partículas con energías negativas - antipartículas - asociadas al electrón que fueron descubiertas posteriormente por Carl Anderson en 1932 y se llaman positrones. Dirac desarrolló también una versión tensorial de la ecuación de Schrödinger, conocida como la ecuación de Dirac, que es correcta desde el punto de vista de la Teoría de la Relatividad. Recibió el premio Nobel de Física en 1933 por sus trabajos sobre antipartículas y mecánica de ondas. Se le considera precursor de la Teoría de Distribuciones desarrollada posteriormente por L. Schwartz.

Es decir, $y = x * h$. En consecuencia, la función h , que es la respuesta del filtro a la función impulso unidad, caracteriza al filtro. Dicha función se llama la función *respuesta impulso* del filtro.

Respuesta impulso de un filtro analógico

Admitamos que existe una “función” δ que es la unidad para la convolución de funciones. En tal caso podremos escribir una señal x en la forma:

$$x(t) = (x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \delta(t-s) ds$$

Usando la continuidad y linealidad del filtro L y poniendo $L(\delta) = h$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} y(t) &= (Lx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) L(\tau_s \delta)(t) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) (\tau_s L\delta)(t) ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds = (x * h)(t) \end{aligned}$$

Resulta así que el filtro es un filtro de convolución. La función h , que es la respuesta del filtro a la función impulso unidad, δ , caracteriza al filtro. Dicha función se llama la función *respuesta impulso* del filtro. La transformada de Fourier de la respuesta impulso, $H(s) = \mathcal{F}\delta(s)$ se llama la *función de transferencia* del filtro. La acción del filtro sobre una señal x viene dada en el dominio de la frecuencia por el producto $\hat{x}(s)H(s)$.

Este es un buen momento para explicar el papel especial que desempeñan las exponenciales complejas. Consideremos que a es un número real y sea $e_a(t) = e^{2\pi i a t}$. La respuesta del filtro a la señal e_a viene dada por

$$\begin{aligned} L(e_a)(t) &= (e_a * h)(t) = (h * e_a)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e_a(t-s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{2\pi i a (t-s)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-2\pi i a s} e^{2\pi i a t} ds = e^{2\pi i a t} \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-2\pi i a s} ds \\ &= H(a) e_a(t) \end{aligned}$$

la igualdad obtenida $L(e_a)(t) = H(a) e_a(t)$ que puede expresarse en términos de funciones como $L(e_a) = H(a) e_a$ nos dice que e_a es un vector propio de L con valor propio asociado igual a $H(a)$. Es decir, *las exponenciales complejas son vectores propios de los filtros*.

Se acerca la hora de la verdad

Ni que decir tiene que muchas de las anteriores afirmaciones carecen del más elemental rigor matemático. . . lo que no quiere decir que sean falsa, de hecho son esencialmente ciertas. Para dar significado matemático a la “función” δ hay que hablar, aunque solo sea un poquito, de la teoría de distribuciones. Una teoría que está considerada como uno de

los mayores logros de las matemáticas del siglo XX. No olvides que en estas notas estamos dejando deliberadamente de lado los tecnicismos matemáticos, esos que solamente interesan a quienes estamos aquejados de esa extraña enfermedad que se llama *Matemáticas*, pero a veces algunos tecnicismos matemáticos son necesarios incluso para los ingenieros, aunque solamente sea para proporcionar seguridad y confianza en los cálculos. Tendremos que volver sobre esto.

3.3.2. Así trabaja la convolución

Vamos a considerar algunos ejemplos de sistemas para comprobar cómo la convolución está presente en todos ellos.

Filtro de paso-bajo

Un filtro ideal de paso-bajo es aquél que elimina todas las frecuencias por encima de una frecuencia dada ν_c y deja pasar inalteradas las frecuencias por debajo de ν_c . Si escribimos la operación del filtro en la forma:

$$y(t) = (x * h)(t), \quad \hat{y}(s) = \hat{x}(s)H(s)$$

entonces la función de transferencia viene dada por:

$$H(s) = \begin{cases} 1, & |s| < \nu_c \\ 0, & |s| \geq \nu_c \end{cases}$$

Es claro que multiplicar $\hat{x}(s)$ por $H(s)$ deja igual el espectro de x para $|s| < \nu_c$ y elimina las demás frecuencias. Observa que $H(s) = \Pi\left(\frac{s}{2\nu_c}\right)$ donde Π es la función pulso rectangular.

En el dominio del tiempo, la respuesta impulso del filtro se obtiene calculando la transformada inversa de Fourier de $H(s)$, que viene dada por:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}H(t) = 2\nu_c \operatorname{senc}(2\nu_c t)$$

Filtro de paso-banda

Con frecuencia lo que se desea es filtrar una señal dejando pasar sin alterar un determinado intervalo de frecuencias y eliminando las demás. Este es el filtro ideal de paso-banda. Su función de transferencia, $B(s)$, puede obtenerse de la función de transferencia, $H(s)$, del filtro de paso-bajo. Centrando la banda de frecuencias que se quiere dejar pasar en ν_0 con un ancho de banda ν_c tenemos que (Ver figura 3.3):

$$B(s) = \begin{cases} 1, & |s - \nu_0| < \nu_c \text{ o } |s + \nu_0| < \nu_c \\ 0, & |s - \nu_0| \geq \nu_c \text{ y } |s + \nu_0| \geq \nu_c \end{cases} = H(s - \nu_0) + H(s + \nu_0)$$

Podemos obtener fácilmente la función respuesta impulso, que viene dada por:

$$b(t) = h(t)e^{2\pi i \nu_0 t} + h(t)e^{-2\pi i \nu_0 t} = 4\nu_c \cos(2\pi \nu_0 t) \operatorname{senc}(2\nu_c t)$$

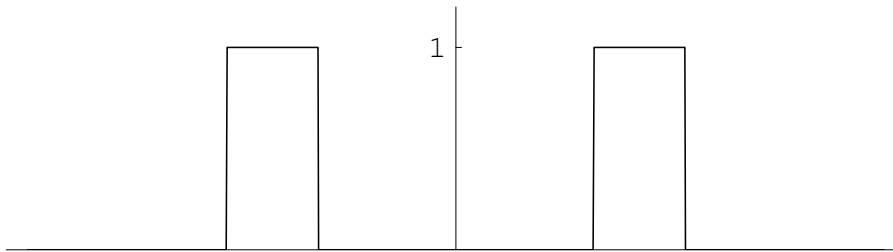


Figura 3.3: Filtro de paso-banda

En la figura 3.4 puedes ver su gráfica para $\nu_0 = 6$ y $\nu_c = 2$.

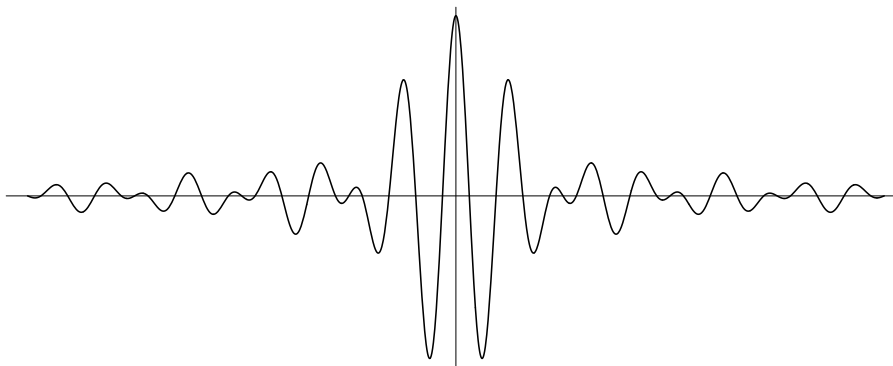


Figura 3.4: Respuesta-impulso del filtro de paso-banda

Filtro de paso-alto

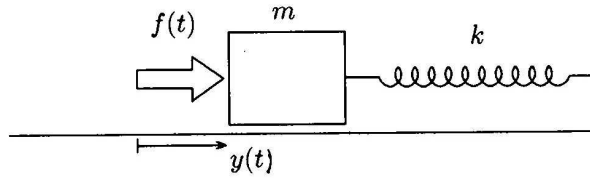
En este filtro se eliminan todas las frecuencias por debajo de una frecuencia de corte ν_c y se dejan pasar inalteradas las frecuencias por arriba de ν_c . Este tipo de filtros es frecuente en tratamiento de imágenes donde altas frecuencias espaciales están asociadas perfiles nítidos mientras que las bajas producen un efecto borroso. La función de transferencia de este filtro viene dada por $1 - H(s)$ donde $H(s)$ es la función de transferencia del filtro de paso-bajo. Por tanto, la función respuesta impulso es $\delta(t) - 2\nu_c \operatorname{senc}(2\nu_c t)$.

Una ecuación diferencial ordinaria

Consideremos la ecuación diferencial

$$my''(t) + ky(t) = f(t)$$

que podemos interpretar como la ecuación de un sistema material formado por un resorte, con constante de recuperación k , que sujeta una masa m que puede deslizarse sobre un plano sin fricción sometida a una fuerza f . La señal de entrada es f y la señal de salida del sistema es la función $y(t)$ solución de la ecuación diferencial. Se trata, evidentemente, de un sistema LTI.



Tomando transformadas de Fourier en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$m(2\pi is)^2 \hat{y}(s) + k\hat{y}(s) = \hat{f}(s)$$

de donde

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{k - 4m\pi^2 s^2} \hat{f}(s)$$

La función $1/(k - 4m\pi^2 s^2)$ recuerda a la transformada de Fourier de $e^{-|t|}$. Ajustando los parámetros a la vista de la propiedad de cambio de escala, obtenemos que dicha función es la transformada de Fourier de la función

$$g(t) = \frac{i}{2\sqrt{km}} e^{-i\sqrt{k/m}|t|}$$

Por tanto $\mathcal{F}y = \mathcal{F}g\mathcal{F}f$ y, por el teorema de convolución, se sigue que:

$$y(t) = g * f(t) = \frac{i}{2\sqrt{km}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\sqrt{k/m}|t-u|} du$$

Este ejemplo puede sernos útil para motivar la función δ desde un punto de vista físico. Consideremos para ello que sometemos al sistema a un impulso casi instantáneo de duración $\varepsilon > 0$ y magnitud constante $f_\varepsilon(t) = 1/\varepsilon$, de forma que el momento lineal de dicha fuerza es:

$$\int_0^\varepsilon f_\varepsilon(t) dt = 1$$

En este caso tenemos que la ecuación diferencial se convierte en:

$$my''(t) + ky(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < t \text{ o } t < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

cuya solución viene dada por:

$$y(t) = \frac{i}{2\sqrt{km}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(u) e^{-i\sqrt{k/m}|t-u|} du = \frac{i}{2\sqrt{km}} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\sqrt{k/m}|t-u|} du$$

El cálculo de esta integral depende de que t sea mayor o menor que ε . Poniendo $\omega = \sqrt{k/m}$, obtenemos:

$$\frac{i}{2\sqrt{km}} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\omega|t-u|} du = \frac{1}{2m\omega^2\varepsilon} \begin{cases} 2 - e^{-i\omega t} - e^{i\omega(t-\varepsilon)}, & 0 < t < \varepsilon \\ e^{-i\omega t} (-1 + e^{i\omega\varepsilon}), & \varepsilon < t \end{cases}$$

Como estamos interesados en soluciones reales tomaremos la parte real de la función obtenida. Con ello obtenemos como solución de la ecuación 3.7:

$$y(t) = \frac{1}{2m\omega^2\varepsilon} \begin{cases} 2 - \cos(\omega t) - \cos(\omega(t-\varepsilon)), & 0 < t < \varepsilon \\ -\cos(\omega t) + \cos(\omega(t-\varepsilon)), & \varepsilon < t \end{cases}$$

Ahora observamos que podemos sumar las dos partes de la solución obtenida para simplificar la expresión de la solución en el intervalo $0 < t < \varepsilon$. Al mismo tiempo, para conseguir una solución continua en $t = 0$ y $t = \varepsilon$, multiplicamos por 2 la parte de la solución en el intervalo $t > \varepsilon$ (observa que esto puede hacerse porque para $t > \varepsilon$ la ecuación 3.7 es homogénea). Resulta así que:

$$y_\varepsilon(t) = \frac{1}{m\omega^2\varepsilon} \begin{cases} 1 - \cos(\omega t), & 0 < t < \varepsilon \\ \cos(\omega(t-\varepsilon)) - \cos(\omega t), & \varepsilon < t \end{cases} \quad (3.8)$$

Por supuesto, $y_\varepsilon(t) = 0$ para $t < 0$. Puedes comprobar que la solución obtenida, que claramente depende de ε , es continua y derivable una vez y es solución de la ecuación diferencial 3.7 en todo punto $t \in \mathbb{R}$ excepto en $t = 0$ y $t = \varepsilon$ donde la derivada segunda no está definida.

Ahora, para $\varepsilon \rightarrow 0$ la función respuesta $y_\varepsilon(t)$ tiene el límite:

$$y_0(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(t) = \frac{1}{m\omega} \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \sin(\omega t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Es perfectamente natural considerar y_0 como la respuesta del sistema al impulso instantáneo:

$$f_0(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)$$

con momento lineal dado por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) dt = 1$$

Naturalmente, dicho *impulso instantáneo* es una idealización. Pero también es una idealización el concepto de punto material. Lo importante es que dicho impulso instantáneo tiene una interpretación física claramente intuitiva. Esta idea de “función impulso instantáneo” ha sido usada por físicos e ingenieros (Maxwell, Heaviside, Dirac, ...) durante más de 150 años obteniendo resultados correctos a pesar de que los métodos que empleaban no tenían justificación matemática. Al impulso instantáneo f_0 se le llama función δ y aquí nos aparece como un límite para $\varepsilon \rightarrow 0$ de las funciones pulso rectangular $f_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)\Pi\left(\frac{t-\varepsilon/2}{2\varepsilon}\right)$. En la figura 3.5 puedes ver la gráfica de la respuesta $y_\varepsilon(t)$ del sistema a un impulso $f_\varepsilon(t)$ y en la figura 3.6 puedes ver la gráfica de la respuesta del sistema $y_0(t)$ al impulso instantáneo $f_0(t)$.

Así empezó todo: la ecuación del calor

En 1807 Fourier envió un trabajo a la Academia de Ciencias de París en el que trataba el problema de la conducción del calor. Concretamente, Fourier consideraba un alambre

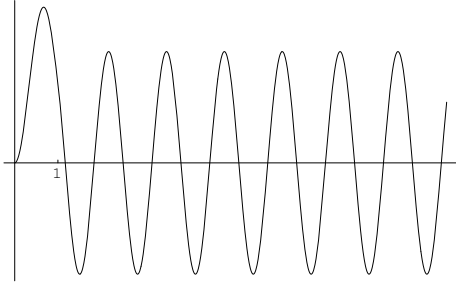


Figura 3.5: Respuesta $y_e(t)$ a un impulso $f_e(t)$.

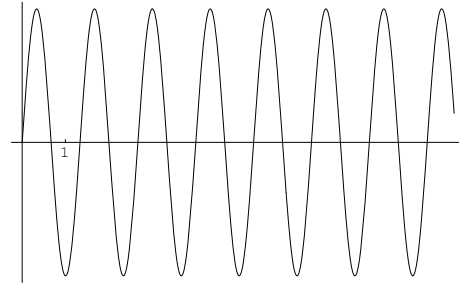


Figura 3.6: Respuesta-impulso $y_0(t)$ del sistema al impulso instantáneo $f_0(t)$.

delgado con una distribución inicial de temperatura dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura en cada sección transversal del alambre es constante) y se trataba de calcular la función $u(x, t)$ que proporciona la temperatura en el punto x del alambre en el instante t . La solución propuesta por Fourier implicaba la posibilidad de representar cualquier función como la suma de una serie trigonométrica y sus métodos fueron severamente criticados por su falta de rigor. Esto fue un estímulo para Fourier que siguió sus estudios publicando en 1822 su obra “*Théorie Analytique de la chaleur*” en la que hace un amplio uso de tales representaciones.

Bajo condiciones físicas adecuadas, Fourier, probó que la función $u(x, t)$ debe satisfacer la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.10)$$

El valor de la constante $1/2$ se ha elegido así para facilitar los cálculos. Supondremos que el alambre tiene longitud infinita. Nuestro dato de partida es la distribución inicial de temperatura dada por $u(x, 0) = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

El sistema que estamos estudiando admite como señal de entrada $f(x)$ y su salida es la función $u(x, t)$. Observa que se trata de un sistema LTI. La idea para obtener la solución de la ecuación del calor es tomar transformadas de Fourier en ambos lados *con respecto a la variable x* . La notación usual $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ puede ser confusa y emplearemos la notación $D_{1,1}u$ para indicar la derivada parcial de la función u dos veces respecto de la primera variable. Esta notación tiene la ventaja de que permite nombrar las variables como queramos sin que ello conduzca a error. La transformada de Fourier de la función $x \mapsto (1/2)D_{1,1}u(x, t)$ viene dada, en virtud del teorema de derivación, por:

$$\frac{1}{2} \widehat{D_{1,1}u}(s, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} D_{1,1}u(x, t) e^{-2\pi i s x} dx = \frac{1}{2} (2\pi i s)^2 \hat{u}(s, t) = -2\pi^2 s^2 \hat{u}(s, t)$$

En el lado izquierdo, además de tomar transformada de Fourier respecto de x , permutamos la derivación con la integral (usamos la notación $D_2u(x, t)$ para indicar derivación

parcial una vez respecto de la segunda variable):

$$\widehat{D_2 u}(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} D_2 u(x, t) e^{-2\pi i s x} dx = D_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2\pi i s x} dx \right) = D_2 \widehat{u}(s, t)$$

Por tanto, al tomar transformadas de Fourier en ambos lados de la ecuación 3.10 con respecto a la variable x obtenemos:

$$\frac{\partial \widehat{u}(s, t)}{\partial t} = -2\pi^2 s^2 \widehat{u}(s, t)$$

Para s fijo, esta es una ecuación diferencial ordinaria respecto a la variable t y podemos resolverla fácilmente para obtener:

$$\widehat{u}(s, t) = \widehat{u}(s, 0) e^{-2\pi^2 s^2 t}$$

La condición inicial $\widehat{u}(s, 0)$ viene dada por:

$$\widehat{u}(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-2\pi i s x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i s x} dx = \widehat{f}(s)$$

Por tanto:

$$\widehat{u}(s, t) = \widehat{f}(s) e^{-2\pi^2 s^2 t}$$

La función $e^{-2\pi^2 s^2 t}$ recuerda la transformada de Fourier de una gaussiana; de hecho, ajustando los parámetros según la propiedad de cambio de escala, es fácil deducir que dicha función es la transformada de Fourier con respecto a la variable x de la función

$$h(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

Tenemos por tanto que $\widehat{u}(s, t) = \widehat{f}(s) \widehat{h}(s, t)$ es el producto de dos transformadas de Fourier (respecto de la variable x) y, por el teorema de convolución, deducimos que:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (f * h)(x, t) = (\text{convolución en la primera variable}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t} dy \end{aligned}$$

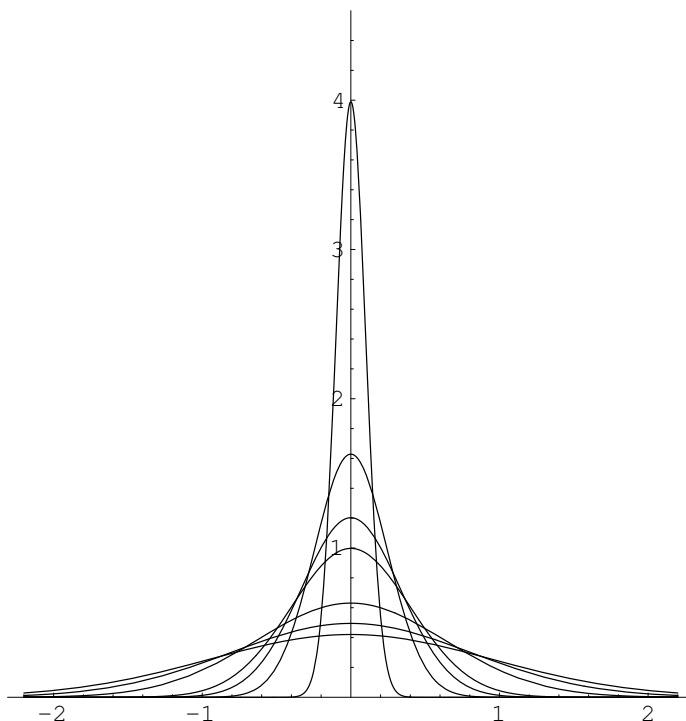
La solución encontrada nos dice que la temperatura del alambre en el punto x y en el tiempo $t > 0$ es un promedio suavizado de la temperatura inicial $f(x) = u(x, 0)$. Eso es lo que significa la convolución con una gaussiana.

La función

$$h(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

es la función de Green de la ecuación del calor para un alambre infinito. Las gráficas de $h(x, t)$ como función de x para valores de $t=1, 0.5, 0.3, 0.1, 0.05, 0.03, 0.01$ puedes verlas en la figura 3.7.

Observa cómo las curvas se van concentrando en $x = 0$. No obstante lo hacen de forma que el área bajo cada curva es constante igual a 1 (no olvides que son funciones de densidad de la distribución normal). Por tanto, estas funciones podemos verlas, cuando $t \rightarrow 0$, como una aproximación de la “función” δ .

Figura 3.7: Gaussianas aproximando a δ

3.4. Funciones generalizadas

La “función” δ o impulso unidad nos ha aparecido varias veces en estas notas. Las dos últimas como límite de funciones pulso rectangular o de gaussianas. En ambos casos dicha “función” parece cumplir las siguientes condiciones:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty, & t=0 \end{cases}$$

y, además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Es claro que no hay una función que verifique estas condiciones y sin embargo si aceptamos estas propiedades y operamos con ellas sin preocuparnos del rigor podemos calcular, por ejemplo, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt$$

donde suponemos que f es derivable. Para ello integramos por partes poniendo

$$u(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

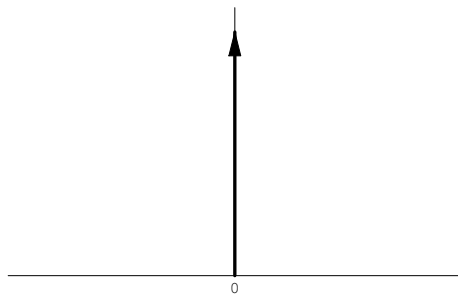


Figura 3.8: Representación del impulso unidad en el origen.

Con lo que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt &= [u(t)f(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)f'(t) dt = f(\infty) - \int_0^{\infty} f'(t) dt = \\ &= f(\infty) - f(\infty) + f(0) = f(0) \end{aligned}$$

Como este resultado tiene perfecto sentido sin necesidad de que f sea derivable podemos definir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0)$$

para toda función continua f . Continuando este orden de ideas podemos probar con un “cambio de variable” que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a) dt = f(a)$$

E incluso antes hemos “probado” que la derivada de la función escalón unidad es la función δ .

Así podríamos seguir desarrollando un formalismo que en la práctica conducía a resultados correctos pero que en sí mismo era incomprensible.

Hay, además, otras razones importantes para realizar el estudio que vamos a comenzar. Comentemos algunas de ellas. Recuerda que una de las primeras transformadas de Fourier que hemos calculado ha sido la de la función $\text{senc}(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$. Dicha función la obtuvimos como la transformada de la función pulso rectangular, $\mathcal{F}\Pi(s) = \text{senc}(s)$ y, usando la propiedad de inversión de la transformada de Fourier y la paridad de Π , dedujimos que $\mathcal{F}\text{senc}(s) = \Pi(s)$. Recuerda también que la condición suficiente básica para que la transformada de Fourier de una función f esté definida es que $f \in L^1(\mathbb{R})$, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Pues, bien, la función senc no está en $L^1(\mathbb{R})$, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |\text{senc}(t)| dt = \infty$. Te digo esto para que seas consciente de que los cálculos que hemos hecho se han basado con frecuencia en el teorema de inversión de Fourier sin molestarnos en comprobar si en cada caso se satisfacían las hipótesis de dicho teorema.

En el caso de la función senc el arreglo es fácil pues su transformada de Fourier tiene

sentido como integral impropia de Riemann, es decir, se verifica que:

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} e^{-2\pi i s t} dt = \Pi(s) \quad (3.11)$$

La diferencia respecto a la integral de Lebesgue, que es la que se usa en toda la teoría de análisis armónico, es que la integral de Lebesgue de una función real f se define en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^+(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} f^-(t) dt$$

donde $f^+(t) = \max\{f(t), 0\}$ es la parte positiva de f y $f^-(t) = \max\{-f(t), 0\}$ es la parte negativa de f . Para que f sea Lebesgue integrable debe ocurrir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^+(t) dt < \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^-(t) dt < \infty$$

y esto no ocurre para la función sinc para la cual las dos integrales anteriores son infinitas. Sin embargo, sí existe el límite 3.11 porque en él cancelan las partes positivas y negativas de la función de manera que su diferencia resulta ser convergente.

No es cómodo que la transformada de Fourier dependa de estas sutilezas y es deseable una teoría más robusta para trabajar con ella. Pero es que hay otros aspectos en la transformada de Fourier que no tienen tan fácil arreglo. Sabemos que la transformada de Fourier de una señal es la representación de dicha señal en el dominio de la frecuencia; las señales más elementales son las sinusoides. Pues bien, la señal $\sin(2\pi t)$ no tiene transformada de Fourier. No hay ninguna teoría de la integral que pueda dotar de significado coherente a la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi t) e^{-2\pi i s t} dt$$

Es decir, las señales sinusoidales ¡no tienen espectro!

Ha habido otro momento en estas notas, al obtener la función respuesta impulso del filtro de paso-alto, en el que “calculamos” la transformada inversa de Fourier de la función constante 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} ds$$

¿Necesito decirte que esa integral carece por completo de significado?

En otro momento, para obtener la respuesta impulso de un filtro analógico, hemos necesitado suponer que existe una función unidad para la convolución ¡cuya transformada de Fourier debería ser la función constante igual a 1! Es momento de poner un poco de orden en todo esto.

Funciones rápidamente decrecientes

Representaremos por \mathcal{S} el conjunto de las funciones $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que verifican las condiciones:

- Tienen derivadas de todos órdenes.

■

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = 0 \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Es decir, cualquier potencia de x multiplicada por cualquier derivada de φ tiene límite cero en $\pm\infty$.

Las funciones de \mathbb{S} se llaman funciones *rápidamente decrecientes* o *funciones de Schwartz*³.

No es difícil dar ejemplos de funciones de Schwarz. Por ejemplo, la función e^{-x^2} es una función de Schwartz. También es inmediato que el producto de una función polinómica por una función de Schwartz es también una función de Schwartz. Lo importante de esta clase de funciones es que son muy suaves (son de clase C^∞) y tienen “colas” que decrecen muy rápidamente. Son funciones excepcionalmente buenas tanto desde el punto de vista de la derivación como de la integración. Por ejemplo, la condición 3.12 implica que las funciones de Schwarz y todas sus derivadas son integrables y, por tanto, sus transformadas de Fourier están definidas.

A continuación resumimos algunas propiedades importantes de la clase \mathbb{S} . Algunas son inmediatas y, lo que es fundamental, todas ellas pueden probarse fácilmente con técnicas básicas del cálculo sin necesidad de recurrir a la teoría de la integración de Lebesgue.

Propiedades de la clase \mathbb{S}

- \mathbb{S} es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y producto por escalares.
- La transformada de Fourier de una función de \mathbb{S} también es una función de \mathbb{S} .
- El teorema de inversión de Fourier es válido para funciones de \mathbb{S} .

Consideremos una función f tal que para toda función $\varphi \in \mathbb{S}$ tenga sentido la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

Eso no es pedirle mucho a f . Cualquier función $f \in L^1(\mathbb{R})$ o $f \in L^2(\mathbb{R})$ satisface esta condición. Con mayor generalidad, es suficiente suponer que f es una función integrable en todo intervalo acotado; *condición que supondremos implícitamente en todo lo que sigue*. En tal caso, podemos definir una aplicación, que notaremos T_f de \mathbb{S} en \mathbb{C} que a cada

³L. Schwartz (1915-2002) matemático francés creador en 1948 de la Teoría de Distribuciones por la que se le concedió en 1950 la medalla Fields (considerada como el premio Nobel de Matemáticas). La Teoría de Distribuciones introduce un concepto muy general de función y permite extender los procesos del Cálculo Diferencial e Integral a esta nueva clase de funciones lo que permite una nueva interpretación de las ecuaciones diferenciales e integrales del Análisis Matemático así como de sus soluciones.

función $\varphi \in \mathbb{S}$ hace corresponder el número dado por la integral anterior:

$$T_f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C} \quad T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt$$

Una primera observación importante es que el conocimiento de T_f permite recuperar f en todo punto donde f sea continua. Es decir, si olvidamos la función f pero sabemos calcular para cada $\varphi \in \mathbb{S}$ el valor de T_f , entonces podemos obtener el valor de f en sus puntos de continuidad. Para ello consideremos la función:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right), & x \in]-1, 1[\\ 0, & x \notin]-1, 1[\end{cases}$$

y definamos para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi(nx)}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(nx) dx}$$

Tenemos que $\varphi_n \in \mathbb{S}$ y fácilmente se comprueba que si a es un punto de continuidad de f se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_n(x-a) dx = f(a)$$

La aplicación T_f tiene además otra propiedad: es lineal.

$$T_f(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T_f(\varphi) + \mu T_f(\psi) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in \mathbb{S})$$

Podemos considerar que T_f es una extensión de la función f y esa es la clave que conduce a la siguiente definición.

Definición 3.7. Una *función generalizada* o una *distribución temperada* T es una aplicación lineal continua de \mathbb{S} en \mathbb{C} .

Con más detalle: Una función generalizada es una aplicación $T : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ que es lineal:

$$T_f(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T_f(\varphi) + \mu T_f(\psi) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in \mathbb{S})$$

y es continua en el sentido de que si $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de funciones de Schwartz con la propiedad de que $\{\varphi_n\} \rightarrow \varphi \in \mathbb{S}$ entonces $T_f(\varphi_n) \rightarrow T_f(\varphi)$.

La continuidad es la parte difícil en esta definición. Decir que $\{\varphi_n\} \rightarrow \varphi$ en \mathbb{S} quiere decir que la sucesión $\{\varphi_n\}$ y *todas sus derivadas* $\{\varphi_n^{(k)}\}$ convergen uniformemente en todo intervalo acotado. Te gustará saber que no tendremos que preocuparnos por esto en lo que sigue.

Las distribuciones que hemos definido se llaman “temperadas” porque hay otros tipos de distribuciones pero, en lo que sigue, las llamaremos, simplemente, “distribuciones” o “funciones generalizadas”.

Una notación cómoda para trabajar con distribuciones es la siguiente:

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$$

que usaremos con frecuencia en lo que sigue.

Representaremos por T_f la distribución definida por una función f :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Es usual identificar T_f con f pues ambas se determinan mutuamente. Pero hay otras distribuciones que no están definidas de esta forma. Un ejemplo importante es el siguiente.

La distribución δ

La aplicación $\delta : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\delta(\varphi) = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

es una distribución temperada. La linealidad es clara pues:

$$\begin{aligned} \langle \delta, \varphi + \psi \rangle &= (\varphi + \psi)(0) = \varphi(0) + \psi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle + \langle \delta, \psi \rangle \\ \langle \delta, \lambda \varphi \rangle &= (\lambda \varphi)(0) = \lambda \varphi(0) = \lambda \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

La continuidad también, pues si $\{\varphi_n\} \rightarrow \varphi$ entonces, en particular, $\{\varphi_n(0)\} \rightarrow \varphi(0)$, por lo que

$$\langle \delta, \varphi_n \rangle = \varphi_n(0) \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Es fácil probar que no hay ninguna función f cuya distribución asociada T_f sea la distribución δ . De esta forma, δ aparece como la distribución temperada más sencilla que no procede de una función.

Con más generalidad. Dado $a \in \mathbb{R}$ se define la distribución δ_a por la igualdad:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Otras aproximaciones de δ que se han sugerido anteriormente pueden obtenerse como sigue.

Definición 3.8. Una sucesión $\{T_n\}$ de distribuciones se dice que converge (débilmente) a una distribución T si para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ se verifica que

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

Es frecuente introducir la función δ como un límite de funciones rectángulo o de gaussianas; nosotros mismos hemos considerado antes estas aproximaciones. El hecho de que la función δ pueda interpretarse de maneras en apariencia tan diferentes queda explicado en la siguiente construcción.

Sea f cualquier función que verifique

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

y definamos para cada $p > 0$ la función

$$f_p(x) = pf(px)$$

Entonces se verifica que $T_{f_p} \rightarrow \delta$.

La demostración es instructiva y sencilla. Hay que probar que para toda $\varphi \in \mathcal{S}$ es

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) (\varphi(t) - \varphi(0) + \varphi(0)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) (\varphi(t) - \varphi(0)) dt + \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) (\varphi(t) - \varphi(0)) dt + \varphi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt + \varphi(0) \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt$$

es finita, podemos tomar un número $a > 0$ tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{-a} f(t) (\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt \right| < \varepsilon \quad \left| \int_a^{\infty} f(t) (\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt \right| < \varepsilon$$

Pongamos

$$M = \int_{-a}^a |f(t)| dt$$

Por la continuidad de φ en $x = 0$ podemos tomar p_0 suficientemente grande de modo que para $p > p_0$ se tenga $|\varphi(x/p) - \varphi(0)| < \varepsilon/m$. Con ello resulta que

$$\left| \int_a^a f(t) (\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt \right| \leq \int_a^a |f(t) (\varphi(t/p) - \varphi(0))| dt < \varepsilon$$

Combinando las tres acotaciones anteriores se deduce que:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt \right| < 3\varepsilon$$

Como queríamos probar.

Derivación de distribuciones

Consideremos una función f derivable cuya derivada f' define una distribución. Dada $\varphi \in \mathbb{S}$, integrando por partes (con la hipótesis de que $f(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ que no es mucho pedir) se obtiene fácilmente:

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx = - \langle T_f, \varphi' \rangle$$

Lo interesante de esta igualdad es que en la última integral no figura la derivada de f y tiene perfecto sentido sin necesidad de que f sea derivable.

Definición 3.9. Dada una distribución T , su derivada es la distribución T' definida por

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

El hecho de que, efectivamente, la definición dada de T' define una distribución, es consecuencia del tipo de convergencia que se considera en \mathbb{S} que involucra no solamente a las funciones sino también a sus derivadas como ya comentamos anteriormente.

Observa que con la definición dada, si f es una función derivable se verifica que $T'_f = T_{f'}$, lo que permite identificar la derivada usual f' de una función derivable f con su derivada generalizada T'_f .

Naturalmente, la definición de derivada de una distribución se puede aplicar a T' para obtener la derivada segunda T'' y derivadas sucesivas. Resulta así que, con la definición dada, *las distribuciones son indefinidamente derivables*.

A partir de ahora, cuando no haya lugar a confusión, identificaremos la distribución T_f con la función f y escribiremos $\langle f, \varphi \rangle$ en lugar de $\langle T_f, \varphi \rangle$.

Derivada de la función escalón unidad

La función escalón unidad llamada también *función de Heaviside*, es la función dada por:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Dicha función determina una distribución que viene dada por

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

La distribución derivada H' viene dada por:

$$\langle H', \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = - \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) - \varphi(0) \right) = \varphi(0)$$

Hemos obtenido que para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ es

$$\langle H', \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Por tanto, $H' = \delta$.

Derivada de la función rampa

La función rampa es la función dada por:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

Dicha función determina una distribución que viene dada por

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} x \varphi(x) dx$$

La distribución derivada u' viene dada por:

$$\langle u', \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx = - \left([x \varphi(x)]_{x=0}^{x \rightarrow \infty} - \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \right) = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

Hemos obtenido que para toda $\varphi \in \mathcal{S}$ es

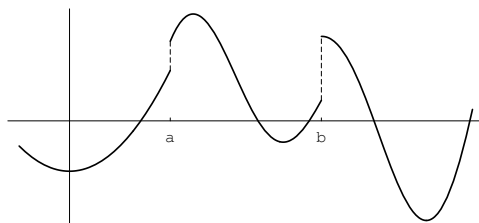
$$\langle u', \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \langle H, \varphi \rangle$$

Por tanto, $u' = H$.

La derivada generalizada de una función discontinua

Consideremos una función continua en \mathbb{R} excepto en dos puntos $a < b$ donde tiene discontinuidades de salto y que tiene derivada continua en los intervalos $]-\infty, a[$, $]a, b[$ y $]b, +\infty[$. Vamos a calcular la derivada generalizada de f vista como distribución, es decir, identificando f con la distribución T_f . Tenemos que:

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^a f(x) \varphi'(x) dx - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx - \int_b^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx$$



Integrando por partes en cada uno de los intervalos, notando $f(a+)$, $f(b+)$ los límites laterales por la derecha y $f(a-)$, $f(b-)$ los límites laterales por la izquierda de f en a y en b , y obtenemos

$$\begin{aligned} \langle T'_f, \varphi \rangle &= -f(a-)\varphi(a) + \int_{-\infty}^a f'(x)\varphi(x) dx - f(b-)\varphi(b) + f(a+)\varphi(a) \\ &\quad + \int_a^b f'(x)\varphi(x) dx + f(b+)\varphi(b) + \int_b^{\infty} f'(x)\varphi(x) dx \end{aligned}$$

Que podemos escribir en la forma

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = \lambda \varphi(a) + \mu \varphi(b) + \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda &= f(a+) - f(a-) \\ \mu &= f(b+) - f(b-)\end{aligned}$$

Hemos obtenido que la derivada generalizada de f viene dada por

$$T'_f = T_{f'} + \lambda \delta_a + \mu \delta_b$$

que suele escribirse como

$$T'_f = f' + \lambda \delta_a + \mu \delta_b$$

Observa que en este caso la derivada generalizada, T'_f , de f , no coincide con la distribución $T_{f'}$ definida por la derivada de f . Las discontinuidades de f en los puntos a y b hacen intervenir las funciones δ_a y δ_b multiplicadas por los saltos λ y μ de f en dichos puntos.

El resultado anterior se generaliza fácilmente para cualquier número finito de discontinuidades de salto. Incluso puede generalizarse para funciones con infinitas discontinuidades de salto. Vamos a verlo.

Sea f una función con discontinuidades de salto en los puntos $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$, donde suponemos que $x_k < x_{k+1}$. Sea

$$\lambda_k = \lim_{\substack{t \rightarrow x_k \\ t > x_k}} f(t) - \lim_{\substack{t \rightarrow x_k \\ t < x_k}} f(t)$$

el salto de f en x_k , y supongamos que la sucesión $\{\lambda_k\}$ está acotada (pueden hacerse hipótesis bastante más generales). Entonces, para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ se verifica que la serie $\sum_{n=-N}^N \varphi(\lambda_k)$

es convergente (de hecho es absolutamente convergente) y la sucesión de distribuciones $\sum_{k=-N}^N \lambda_k \delta_{x_k}$ converge a una distribución que notamos, claro está, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_k \delta_{x_k}$ definida para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ por

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_k \delta_{x_k}, \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_k)$$

En estas condiciones, suponiendo que f es derivable en \mathbb{R} exceptuando los puntos x_k , se verifica que

$$T'_f = f' + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_k \delta_{x_k} \quad (3.13)$$

La distribución “valor principal”

La función $f(x) = 1/x$ no define una distribución pues si $\varphi \in \mathbb{S}$ la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

puede no existir. Dado que la función $f(x) = 1/x$ aparece con frecuencia en la práctica (piensa en la descomposición en fracciones simples de las funciones racionales) es importante darle entrada de alguna forma en el mundo de las distribuciones. Ello puede hacerse observando que la función $g(x) = \log |x|$ sí define una distribución pues para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log |x| \varphi(x) dx$$

está definida. Como la derivada de g es f , definimos la distribución “valor principal”, que representamos por $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$, como la derivada generalizada de la función $g(x) = \log |x|$. Por tanto

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \langle T'_g, \varphi \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \log |x| \varphi'(x) dx$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log |x| \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon$$

donde

$$J_\varepsilon = -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log |x| \varphi'(x) dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \log |x| \varphi'(x) dx$$

Integrando por partes se obtiene fácilmente que

$$J_\varepsilon = (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \log \varepsilon + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Por el teorema del valor medio

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = 2\varepsilon \varphi'(c_\varepsilon) \quad |c_\varepsilon| < \varepsilon$$

lo que implica que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \log \varepsilon = 0$ y, por tanto, obtenemos

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$

Teorema 3.10. *Dos distribuciones que tienen igual derivada se diferencian en una constante.*

Es suficiente probar que si T es una distribución con derivada nula entonces hay un número λ tal que $T = \lambda$, es decir, $\langle T, \varphi \rangle = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$ para toda $\varphi \in \mathbb{S}$.

Por hipótesis se verifica que $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = 0$, esto es, $\langle T, \varphi' \rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathbb{S}$. Esto nos lleva a considerar el conjunto $\mathbb{S}_0 = \{\varphi' : \varphi \in \mathbb{S}\}$. Probemos que

$$\mathbb{S}_0 = \{\varphi' : \varphi \in \mathbb{S}\} = \left\{ \psi \in \mathbb{S} : \int_{-\infty}^{\infty} \psi = 0 \right\}$$

Si $\varphi \in \mathbb{S}$ entonces también $\varphi' \in \mathbb{S}$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi' = 0$. Recíprocamente, si $\psi \in \mathbb{S}$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \psi = 0$ definiendo

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$$

se tiene que la función φ pertenece a \mathbb{S} y $\varphi'(x) = \psi(x)$, luego $\psi \in \mathbb{S}_0$.

Sea ω una función fija en \mathbb{S} tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1$. Dado un elemento arbitrario φ de \mathbb{S} , definamos $\psi_\varphi = \varphi - I(\varphi)\omega$, donde $I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi$. Entonces

$$\varphi = \psi_\varphi + I(\varphi)\omega$$

y $\psi_\varphi \in \mathbb{S}_0$. Poniendo $\lambda = \langle T, \omega \rangle$, deducimos que

$$\langle T, \varphi \rangle = I(\varphi) \langle T, \omega \rangle = \lambda I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \varphi(x) dx = \langle \lambda, \varphi \rangle$$

lo que prueba que la distribución T es la distribución constante λ .

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de las definiciones dadas y del tipo de convergencia que se considera en \mathbb{S} .

Teorema 3.11. *La derivación de distribuciones es una operación continua. Es decir si una sucesión de distribuciones T_n converge a una distribución T entonces se verifica que T_n' converge a T' .*

Transformada de Fourier de una distribución

Dada $\psi \in \mathbb{S}$ sabemos que su transformada de Fourier, $\mathcal{F}\psi$ también está en \mathbb{S} y, por tanto, define una distribución por la igualdad:

$$\langle \mathcal{F}\psi, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\psi(x) \varphi(x) dx$$

Podemos escribir esta integral como sigue:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\psi, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) e^{-2\pi ixy} dy \right) \varphi(x) dx = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \psi(y) e^{-2\pi ixy} d(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi ixy} dx \right) \psi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(y) \psi(y) dy = \langle \psi, \mathcal{F}\varphi \rangle \end{aligned}$$

Hemos obtenido que para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ se verifica que

$$\langle \mathcal{F}\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

Esto nos da la pista para definir la transformada de Fourier de una distribución.

Definición 3.12. La transformada de Fourier de una distribución T es la distribución $\mathcal{F}T$ o \hat{T} definida para toda función $\varphi \in \mathbb{S}$ por la igualdad

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

La misma estrategia sirve para definir la transformada inversa de Fourier. La transformada inversa de Fourier de una distribución T es la distribución $\mathcal{F}^{-1}T$ o \check{T} definida para toda función $\varphi \in \mathbb{S}$ por la igualdad

$$\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$$

Las definiciones dadas hacen que el siguiente resultado sea un simple ejercicio.

Teorema de inversión de Fourier. Para toda distribución temperada T se verifica que:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = T \quad \text{y} \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T = T$$

La demostración es consecuencia inmediata de las definiciones dadas y de que el teorema de inversión es válido para funciones de la clase \mathbb{S} (esa es la razón que justifica la elección de dicha clase). Tenemos que:

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}T), \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Como esta igualdad es válida para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ concluimos que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}T) = T$. Análogamente se prueba la otra igualdad.

Si f es una función integrable se verifica que $\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f}$. En efecto, para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle &= \langle T_f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\mathcal{F}\varphi)(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i t x} dt \right] dx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \varphi(t) e^{-2\pi i t x} d(t, x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(t) e^{-2\pi i t x} dx \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)(\mathcal{F}f)(t) dt = \langle T_{\mathcal{F}f}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

La permutación de integrales está justificada por la integrabilidad de f .

Transformada de Fourier de la distribución δ

La transformada de Fourier de δ viene dada por

$$\mathcal{F}\delta = 1$$

Esta igualdad debe ser correctamente entendida. Lo que nos dice es que las distribuciones $\mathcal{F}\delta$ y la distribución inducida por la función constante 1:

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

son iguales. Para comprobarlo basta usar las definiciones correspondientes.

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle = \mathcal{F}\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

La igualdad primera es la definición de la transformada de Fourier de una distribución, la igualdad segunda es la definición de la distribución δ y la última igualdad es consecuencia de que el valor en $s = 0$ de la transformada de Fourier de una función es la integral en \mathbb{R} de dicha función. Resulta así que $\mathcal{F}\delta = 1$. En virtud del teorema de inversión deducimos que $\mathcal{F}^{-1}1 = \delta$.

También podemos probar que

$$\mathcal{F}1 = \delta$$

Pues

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(s) ds$$

Pero

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(s) e^{2\pi i s t} ds \implies \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(s) ds$$

y, como el teorema de inversión de Fourier es válido en \mathbb{S} , $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(0) = \varphi(0)$. Por tanto, hemos obtenido que

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

y concluimos que $\mathcal{F}1 = \delta$.

La transformada de Fourier de la distribución δ_a

Dado $a \in \mathbb{R}$ se define la distribución δ_a por la igualdad:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Calculemos su transformada de Fourier.

$$\langle \mathcal{F}\delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}\varphi \rangle = \mathcal{F}\varphi(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i a x} dx$$

La última igualdad, que es simplemente la definición de la transformada de Fourier, puede interpretarse como el valor de la distribución asociada a la función $x \mapsto e^{-2\pi i a x}$ sobre la función φ , es decir:

$$\langle \mathcal{F}\delta_a, \varphi \rangle = \langle e^{-2\pi i a x}, \varphi \rangle$$

Por tanto

$$\mathcal{F}\delta_a = e^{-2\pi i a x}$$

Donde esta igualdad se entiende (no puede entenderse de otra forma) como una igualdad entre distribuciones. Observa que aunque la función $e^{-2\pi i a x}$ no es integrable, sin embargo define una distribución por el convenio usual de que a una función $\varphi \in \mathbb{S}$ le asigna el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i a x} dx$$

integral que sí existe por ser φ integrable. Por tanto, la igualdad $\mathcal{F}\delta_a = e^{-2\pi i ax}$ es otra forma de escribir la igualdad

$$\langle \mathcal{F}\delta_a, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i ax} dx \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

También podemos comprobar que la transformada de Fourier de la distribución $e^{2\pi i ax}$ es la distribución δ_a .

$$\mathcal{F}e^{2\pi i ax} = \delta_a$$

Tenemos que

$$\langle \mathcal{F}e^{2\pi i ax}, \varphi \rangle = \langle e^{2\pi i ax}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i ax} \mathcal{F}\varphi(x) dx$$

Pero esta última integral es la transformada de Fourier inversa de $\mathcal{F}\varphi$ en a y, por tanto, igual a $\varphi(a)$. Resulta así que

$$\langle \mathcal{F}e^{2\pi i ax}, \varphi \rangle = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

Luego $\mathcal{F}e^{2\pi i ax} = \delta_a$.

Observaciones sobre la notación

Es frecuente escribir $\delta(x)$ por δ y $\delta(x-a)$ por δ_a . Estas notaciones son cómodas y pueden ser útiles pero no tienen mucho sentido. Recuerda: δ y δ_a no son funciones y no se evalúan en puntos; son distribuciones y se evalúan en funciones.

Así mismo es frecuente escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) \varphi(x) dx = \varphi(a)$$

que es otra manera de escribir las *definiciones* de dichas funciones pero no son integrales en el sentido usual del término. Nosotros también usaremos esta notación de vez en cuando.

Las transformadas de Fourier del seno y del coseno

Podemos combinar los resultados anteriores para obtener las transformadas de Fourier del seno y del coseno.

Tenemos que

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})\right) = \frac{1}{2}(e^{-2\pi i as} + e^{2\pi i as}) = \cos(2\pi as)$$

Que suele escribirse en la forma

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(\delta(x-a) + \delta(x+a))\right) = \cos(2\pi as)$$

Y también

$$\mathcal{F}\cos(2\pi as) = \mathcal{F}\frac{1}{2}(e^{-2\pi ias} + e^{2\pi ias}) = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a}) = \frac{1}{2}(\delta(x-a) + \delta(x+a))$$

La transformada de Fourier del coseno suele representarse gráficamente como en la figura 3.9.

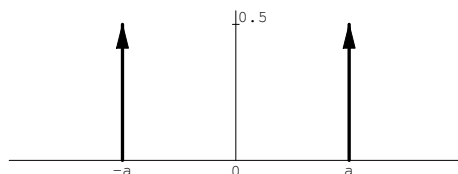


Figura 3.9: Representación de la transformada de Fourier del coseno.

Análogamente, para la función seno tenemos que

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2i}(\delta_{-a} - \delta_a)\right) = \frac{1}{2i}(e^{2\pi ias} - e^{-2\pi ias}) = \sin(2\pi as)$$

y

$$\mathcal{F}\sin(2\pi ax) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2i}(e^{2\pi iax} - e^{-2\pi iax})\right) = \frac{1}{2i}(\delta_a - \delta_{-a})$$

La transformada de Fourier del seno suele representarse gráficamente como en la figura 3.10.

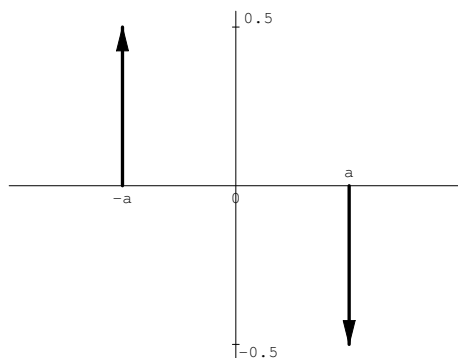


Figura 3.10: Representación de la transformada de Fourier del seno.

Operaciones elementales con distribuciones

Las operaciones elementales con señales que consisten en trasladar la variable o en multiplicarla por un número no nulo:

$$(\sigma_a f)(x) = f(ax), \quad (\tau_a f)(x) = f(x-a)$$

pueden definirse también para distribuciones siguiendo el procedimiento, que ya debe empezar a sonar familiar, que consiste en expresar primero dichas operaciones en términos de la distribución definida por una función para después generalizar al caso de una distribución cualquiera. Sea, pues, f una función y $\varphi \in \mathbb{S}$:

$$\begin{aligned}\langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_a f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t+a) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tau_{-a} \varphi(x) dx = \langle T_f, \tau_{-a} \varphi \rangle\end{aligned}$$

En general, si T es una función generalizada definimos $\tau_a T$ como la distribución dada por:

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Con esta definición se tiene que $\tau_a T_f = T_{\tau_a f}$.

Se dice que T es *periódica* con período $a \neq 0$ si $\tau_a T = T$.

Análogamente, como:

$$\begin{aligned}\langle T_{\sigma_a f}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_a f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{|a|} \varphi(t/a) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{|a|} \sigma_{1/a} \varphi(x) dx = \left\langle T_f, \frac{1}{|a|} \sigma_{1/a} \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

Definimos para toda función generalizada T :

$$\langle \sigma_a T, \varphi \rangle = \left\langle T, \frac{1}{|a|} \sigma_{1/a} \varphi \right\rangle \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Con esta definición se tiene que $\sigma_a T_f = T_{\sigma_a f}$.

Con las definiciones dadas es inmediato comprobar que $\delta_a = \tau_a \delta$ y $\sigma_a \delta = \frac{1}{|a|} \delta$. Igualdades que suelen escribirse en la forma $\delta_a(x) = \delta(x-a)$, $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$.

Distribuciones pares e impares. Propiedades de simetría de la transformada de Fourier

Una función f es par cuando $f(-x) = f(x)$ y es impar cuando $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos escribir estas igualdades en la forma $\sigma_{-1} f = f$ y $\sigma_{-1} f = -f$ respectivamente. Diremos que una distribución T es par cuando $\sigma_{-1} T = T$ y diremos que es impar cuando $\sigma_{-1} T = -T$.

Es cómodo usar la notación $\sigma_{-1} f = f^-$ y $\sigma_{-1} T = T^-$ y así lo haremos en adelante. Por tanto:

$$\begin{aligned}T \text{ es par} &\iff \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi^- \rangle & (\varphi \in \mathbb{S}) \\ T \text{ es impar} &\iff \langle T, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi^- \rangle & (\varphi \in \mathbb{S})\end{aligned}$$

Por ejemplo, la distribución δ es par pues:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = \varphi(-0) = \langle \delta, \varphi^- \rangle$$

Igualmente se comprueba fácilmente que $\delta_a + \delta_{-a}$ es par y $\delta_a - \delta_{-a}$ es impar. No es de extrañar que podamos recuperar para distribuciones las propiedades de simetría de la transformada de Fourier. Recordemos las siguientes propiedades válidas, por supuesto, para toda $\varphi \in \mathbb{S}$:

- a) $\mathcal{F}\varphi(s) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(-s)$ que podemos escribir $\mathcal{F}\varphi = (\mathcal{F}^{-1}\varphi)^-$.
- b) $\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi(s) = \varphi(-s)$ que podemos escribir $\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi = \varphi^-$. De donde se sigue que $\mathcal{F}^{-1}(\varphi^-) = \mathcal{F}\varphi$ o, lo que es igual, $\mathcal{F}^{-1}\varphi = \mathcal{F}(\varphi^-)$.
- c) Si φ es par entonces $\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}^{-1}\varphi$ y $\mathcal{F}\varphi$ es una función par.
- d) Si φ es impar entonces $\mathcal{F}\varphi = -\mathcal{F}^{-1}\varphi$ y $\mathcal{F}\varphi$ es una función impar.

Pues bien, es un ejercicio sencillo probar que estas propiedades permanecen válidas para distribuciones. Si T es una distribución se verifica:

- a') $\mathcal{F}T = (\mathcal{F}^{-1}T)^-$.
- b') $\mathcal{F}\mathcal{F}T = T^-$.
- c') Si T es par entonces $\mathcal{F}T = \mathcal{F}^{-1}T$ y $\mathcal{F}T$ es una función generalizada par.
- d') Si T es impar entonces $\mathcal{F}T = -\mathcal{F}^{-1}T$ y $\mathcal{F}T$ es una función generalizada impar.

Comprobemos la primera igualdad de la que pueden deducirse las otras. Sea $\varphi \in \mathbb{S}$.

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{F}T)^-, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}T, \varphi^- \rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}(\varphi^-) \rangle \quad (\text{por definición de transformada de Fourier de } T) \\ &= \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle \quad (\text{por el apartado b) anterior}) \\ &= \langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle \quad (\text{por definición de transformada de Fourier inversa de } T) \end{aligned}$$

Deducimos que $(\mathcal{F}T)^- = \mathcal{F}^{-1}T$ o, lo que es igual, $\mathcal{F}T = (\mathcal{F}^{-1}T)^-$.

Usemos estos resultados para obtener de nuevo que $\mathcal{F}1 = \delta$. Tenemos

$$\mathcal{F}1 = (\mathcal{F}^{-1}1)^- = \delta^- = \delta$$

Al empezar este apartado comentamos que la función senc no es integrable en el sentido de Lebesgue y que su transformada de Fourier debe interpretarse como una integral impropia de Riemann. Aunque la función senc no es integrable, es continua y, por tanto, define una distribución T_{senc} . Vamos a calcular $\mathcal{F}T_{\text{senc}}$. Usaremos que $\mathcal{F}\Pi = \text{senc}$ igualdad perfectamente lícita pues la función Π es, evidentemente, integrable. En consecuencia se verifica que $\mathcal{F}T_{\Pi} = T_{\mathcal{F}\Pi} = T_{\text{senc}}$. Para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ tenemos:

$$\langle \mathcal{F}T_{\text{senc}}, \varphi \rangle = \langle T_{\text{senc}}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T_{\mathcal{F}\Pi}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T_{\Pi}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T_{\Pi}, \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T_{\Pi}, \varphi^- \rangle = \langle T_{\Pi}, \varphi \rangle$$

Donde, en la ultima igualdad hemos tenido en cuenta la paridad de Π . Hemos probado que

$$\mathcal{F}T_{\text{senc}} = T_{\Pi}$$

igualdad que suele escribirse $\mathcal{F}\text{senc} = \Pi$.

Las propiedades de traslación en el tiempo y cambio de escala de la transformada de Fourier válidas para funciones permanecen igualmente válidas para distribuciones y su comprobación se deja como ejercicio.

Traslación en el tiempo. Dado un número $a \in \mathbb{R}$ y una distribución T , se verifica que:

$$\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-2\pi i a s} \mathcal{F}T$$

Cambio de escala o dilatación. Dado un número $a \in \mathbb{R}^*$ y una distribución T , se verifica que:

$$\mathcal{F}(\sigma_a T) = \frac{1}{|a|} \sigma_{1/a} \mathcal{F}T$$

Producto de una función por una distribución

No pienses que con las distribuciones podemos hacer cualquier cosa; por ejemplo no es posible definir el producto de dos distribuciones cualesquiera de forma que respete el producto usual de funciones. Si fuera posible definir el producto de dos distribuciones de la forma indicada, entonces debería verificarse que

$$T_f T_g = T_{fg}$$

Pero esto no tiene por qué ser cierto ya que puede ocurrir que f y g sean localmente integrables pero su producto no lo sea (por ejemplo $f(x) = g(x) = |x|^{-1/2}$).

No hay problema en definir el producto de una distribución por una función g que verifique la condición de que $g\varphi \in \mathcal{S}$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}$ (por ejemplo, las funciones polinómicas). En tal caso se define el producto gT de g por una distribución T como la distribución dada por

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S})$$

Con esta definición es inmediato comprobar que si T_f es la distribución definida por una función, se verifica que $gT_f = T_{gf}$.

A las propiedades de la transformada de Fourier de distribuciones podemos añadir ahora la propiedad de modulación cuya comprobación queda como ejercicio.

Propiedad de modulación. Dado $a \in \mathbb{R}$, y una distribución T , se verifica que:

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i a t} T) = \tau_a \mathcal{F}T$$

Es fácil comprobar que $g\delta_a = g(a)\delta_a$ pues para toda $\varphi \in \mathcal{S}$ es

$$\langle g\delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, g\varphi \rangle = g(a)\varphi(a) = \langle g(a)\delta_a, \varphi \rangle$$

Esta igualdad suele escribirse

$$g(x)\delta(x-a) = g(a)\delta(x-a) \quad (3.14)$$

Deducimos que si g es una función que se anula en 0 se tiene que $g\delta = 0$, en particular $x\delta = 0$.

La propiedad $x\delta = 0$ caracteriza a δ en el sentido de que si T es una distribución y se verifica que $xT = 0$ entonces hay un número c tal que $T = c\delta$. Este resultado (cuya demostración es elemental) lo usaremos a continuación.

Es fácil, por otra parte, comprobar la igualdad $x \cdot \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ pues para toda $\varphi \in \mathcal{S}$ se tiene que

$$\left\langle x \cdot \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

Deducimos que si T es una distribución y se verifica que $xT = 1$ entonces

$$x \left(T - \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0 \implies T - \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = c\delta \quad (3.15)$$

Teorema de derivación para la transformada de Fourier

Una de las propiedades más interesantes de la transformada de Fourier es que convierte la operación de derivación en un producto; lo que hace que la transformada de Fourier sea una herramienta extraordinariamente útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales.

Recordemos que el teorema de derivación para la transformada de Fourier de funciones dice que

$$\mathcal{F}(f')(s) = 2\pi i s \mathcal{F}f(s) \quad \mathcal{F}(-2i\pi t f(t))(s) = (\mathcal{F}f)'(s)$$

dicho resultado no es válido en general pero sí lo es, por supuesto, para cualquier función de la clase de Schwartz.

Queremos generalizar este resultado para distribuciones:

$$\mathcal{F}(T') = 2\pi i s \mathcal{F}T \quad \mathcal{F}(-2i\pi s T) = (\mathcal{F}T)' \quad (3.16)$$

Probaremos la primera de estas igualdades. Basta observar que para toda $\varphi \in \mathcal{S}$ se verifica

$$\langle \mathcal{F}(T'), \varphi \rangle = \langle T', \mathcal{F}\varphi \rangle = -\langle T, (\mathcal{F}\varphi)' \rangle = -\langle T, \mathcal{F}(-2i\pi s \varphi) \rangle = -\langle \mathcal{F}T, -2i\pi s \varphi \rangle = \langle 2\pi i s \mathcal{F}T, \varphi \rangle$$

Transformada de Fourier de la función escalón unidad, de la función “signo” y de la distribución “valor principal”

La función “signo” está definida por

$$\text{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Su derivada generalizada es $\text{sgn}' = 2\delta$ por lo que $\mathcal{F}\text{sgn}' = 2$ y como $\mathcal{F}\text{sgn}' = 2\pi i x \mathcal{F}\text{sgn}$, deducimos que $\pi i x \mathcal{F}\text{sgn} = 1$ y, por 3.15, se sigue que hay un número c tal que

$$\mathcal{F}\text{sgn} = \frac{1}{\pi i} \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right) + c \delta$$

Como la función sgn es impar su transformada de Fourier también es impar y también es impar la distribución *valor principal*. Como δ es par, la igualdad anterior exige que $c = 0$. Hemos obtenido así que:

$$\mathcal{F}\text{sgn} = \frac{1}{\pi i} \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$$

En el contexto de la teoría de distribuciones la distribución valor principal suele escribirse

$$\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x}$$

siguiendo este convenio escribimos

$$\mathcal{F}\text{sgn} = \frac{1}{\pi i x}$$

A partir de aquí deducimos la transformada de Fourier de $1/x$. Como se trata de distribuciones impares resulta

$$\mathcal{F} \left(\frac{1}{x} \right) = -\pi i \text{sgn}$$

Ahora, teniendo en cuenta que la función escalón unidad $H(t) = 1/2(1 + \text{sgn} t)$, deducimos que

$$\mathcal{F}H = \frac{1}{2} \left(\delta + \frac{1}{\pi i x} \right)$$

La función generalizada “tren de impulsos”

Supongamos que $\varphi \in \mathcal{S}$ y sea $a > 0$. Es fácil comprobar que la serie $\sum_{n \geq 1} \varphi(an)$ es absolutamente convergente. En efecto, como $x^2 \varphi(x)$ tiene límite 0 cuando $x \rightarrow +\infty$, se sigue que existe $M > 0$ tal que $|x^2 \varphi(x)| \leq M$ para todo $x \geq 0$. Por tanto

$$|n^2 a^2 \varphi(na)| \leq M \implies |\varphi(na)| \leq \frac{M}{a^2} \frac{1}{n^2}$$

y, por el criterio de comparación, se sigue que la serie $\sum_{n \geq 1} \varphi(an)$ es absolutamente convergente. De la misma forma, usando que $x^2 \varphi(x)$ tiene límite 0 cuando $x \rightarrow -\infty$, se justifica que la serie $\sum_{n \geq 1} \varphi(-an)$ es absolutamente convergente. Podemos por tanto escribir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(an) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \varphi(an)$$

Sea T_N la distribución $T_N = \sum_{n=-N}^N \delta_{an}$. Para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ tenemos que

$$\langle T_N, \varphi \rangle = \sum_{n=-N}^N \langle \delta_{an}, \varphi \rangle = \sum_{n=-N}^N \varphi(an)$$

y deducimos que T_N converge débilmente, en el sentido de la definición 3.8, a la distribución:

$$\mathbb{I}_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{an}$$

definida por

$$\langle \mathbb{I}_a, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(an) \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Cuando $a = 1$ la distribución $\mathbb{I}_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$ se representa por \mathbb{I} , y se llama función *tren de impulsos* o función *peine* o función *shah*. La función generalizada \mathbb{I}_a es periódica con período a .

Suele escribirse

$$\mathbb{I}_a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{ak}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - ka)$$

Esta función se emplea para representar las muestras de una señal f a intervalos igualmente espaciados a segundos. Esto se debe a la siguiente igualdad que resulta de multiplicar la señal f por dicha función.

$$f(x)\mathbb{I}_a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(ka)\delta(x - ka) \quad (3.17)$$

Es decir, el producto $f(x)\mathbb{I}_a(x)$ conserva los valores de f en los múltiplos enteros de a y pierde cualquier otra información sobre f ; por eso se interpreta como el resultado de muestrear la señal f a intervalos igualmente espaciados a segundos.

La función shah, como toda distribución, tiene una transformada de Fourier que vamos a calcular. Para eso necesitamos un resultado clásico que establece una llamativa igualdad.

Fórmula de sumación de Poisson. Para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ se verifica que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) \quad (3.18)$$

De hecho, esta igualdad es válida para funciones más generales que las de la clase de Schwartz pero para dichas funciones es muy fácil de probar. Basta recordar que si $\varphi \in \mathbb{S}$ (en cuyo caso también $\mathcal{F}\varphi \in \mathbb{S}$) entonces la función $x^2\varphi(x)$ está acotada en \mathbb{R} lo que implica que las series en 3.18 son (absolutamente) convergentes y que también converge la serie:

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t - k)$$

y define una función con derivada continua. La función ψ es periódica con período 1 y tiene un desarrollo en serie de Fourier

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Tenemos que

$$\psi(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$$

Para probar 3.18 probaremos que $c_n = \mathcal{F}\phi(n)$.

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \psi(t) dt = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t-k) \right) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \phi(t-k) dt = [u = t-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{-k+1} e^{-2\pi i n(u+k)} \phi(u) du \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{-k+1} e^{-2\pi i n t} e^{-2\pi i n k} \phi(t) dt = [e^{-2\pi i n k} = 1] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n t} \phi(t) dt = \mathcal{F}\phi(n) \end{aligned}$$

Calculemos la transformada de Fourier de la función shah. Para toda $\phi \in \mathbb{S}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\mathbb{III}, \phi \rangle &= \langle \mathbb{III}, \mathcal{F}\phi \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k, \mathcal{F}\phi \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \delta_k, \mathcal{F}\phi \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\phi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \delta_k, \phi \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k, \phi \right\rangle = \langle \mathbb{III}, \phi \rangle \end{aligned}$$

Deducimos que $\mathcal{F}\mathbb{III} = \mathbb{III}$. Una notable propiedad de la función tren de impulsos: su transformada de Fourier es ella misma. Recordando que $\mathcal{F}\delta_k = e^{-2\pi i k s}$ podemos obtener una interesante igualdad.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n = \mathbb{III} = \mathcal{F}\mathbb{III} = \mathcal{F}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\delta_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s} \quad (3.19)$$

en donde se entiende que la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s}$ es convergente en el sentido de las distribuciones. Es decir, se verifica que

$$\langle \mathbb{III}, \phi \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s}, \phi \right\rangle$$

igualdad que es bien fácil de comprobar usando la fórmula de Poisson:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s}, \varphi \right\rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s} \varphi(s) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}\varphi(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) = \langle \mathbb{I}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Observa que, como la función seno es impar y la función coseno par, se tiene que

$$\sum_{k=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s} \varphi(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) ds + 2 \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi k s) \varphi(s) ds = \left\langle 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2\pi k s), \varphi \right\rangle$$

Por lo que también

$$\mathbb{I} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) 1 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi n x) \quad (3.20)$$

Una relación útil entre $\sigma_a \mathbb{I}$ y \mathbb{I}_a viene dada por la igualdad fácil de comprobar:

$$\sigma_a \mathbb{I} = \frac{1}{a} \mathbb{I}_{1/a} \quad (3.21)$$

Usando esta igualdad y su equivalente $\mathbb{I}_a = \frac{1}{a} \sigma_{1/a} \mathbb{I}$ y recordando el comportamiento de la transformada de Fourier respecto a los cambios de escala, se tiene que

$$\mathcal{F} \mathbb{I}_a = \frac{1}{a} \mathcal{F}(\sigma_{1/a} \mathbb{I}) = \sigma_a \mathcal{F} \mathbb{I} = \sigma_a \mathbb{I} = \frac{1}{a} \mathbb{I}_{1/a}$$

o, lo que es igual, $\mathbb{I}_a = \frac{1}{a} \mathcal{F} \mathbb{I}_{1/a}$, es decir

$$\mathbb{I}_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{an} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-an) = \frac{1}{a} \mathcal{F} \mathbb{I}_{1/a} = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F} \delta_{n/a} = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x n/a} \quad (3.22)$$

Al igual que antes, podemos escribir esta igualdad solamente con cosenos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-an) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \quad (3.23)$$

Deducimos también fácilmente que para $b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-b-an) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{a}(x-b)\right) \quad (3.24)$$

Lo repetiré una vez más: todas las igualdades anteriores son igualdades entre distribuciones.

Convolución de una función con una distribución

Es fácil definir la convolución de una función de Schwartz con una distribución. Sea $\psi \in \mathbb{S}$ y T una distribución. Se define la convolución $\psi * T$ como la distribución dada por:

$$\langle \psi * T, \phi \rangle = \langle T, \psi^- * \phi \rangle$$

Con esta definición es fácil probar que si T_f es la distribución definida por una función f se verifica que $\psi * T_f = T_{\psi * f}$.

Propiedad de convolución de δ . Para toda $\psi \in \mathbb{S}$ se verifica que

$$\psi * \delta = \psi$$

igualdad que, naturalmente, se interpreta en el sentido de las distribuciones.

En efecto, para toda $\phi \in \mathbb{S}$ tenemos que:

$$\langle \psi * \delta, \phi \rangle = \langle \delta, \psi^- * \phi \rangle = (\psi^- * \phi)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^-(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \phi(x) dx = \langle \psi, \phi \rangle$$

La igualdad $\psi * \delta = \psi$ suele escribirse en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) \psi(y) dy = \psi(x) \quad (3.25)$$

y nos referiremos a ella como *propiedad de localización* de la función δ .

De igual forma se obtiene que

$$\psi * \delta_a = \tau_a \psi$$

que suele escribirse como

$$\psi(x) * \delta(x-a) = \psi(x-a) \quad (3.26)$$

Teorema de convolución. Para toda $\psi \in \mathbb{S}$ y para toda distribución T se verifica que

$$\mathcal{F}(\psi * T) = (\mathcal{F}\psi)(\mathcal{F}T) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(\psi T) = \mathcal{F}\psi * \mathcal{F}T \quad (3.27)$$

igualdades que, naturalmente, se interpretan en el sentido de las distribuciones. Análogas igualdades son válidas para \mathcal{F}^{-1} .

En efecto, para toda $\phi \in \mathbb{S}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\psi * T), \phi \rangle &= \langle \psi * T, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle T, \psi^- * \mathcal{F}\phi \rangle && \text{(usando la igualdad } \mathcal{F}\mathcal{F}\psi = \psi^-) \\ &= \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}\psi * \mathcal{F}\phi \rangle \\ &&& \text{(convolución de transformadas de Fourier igual a transformada de Fourier del producto)} \\ &= \langle T, \mathcal{F}((\mathcal{F}\psi)\phi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, (\mathcal{F}\psi)\phi \rangle = \langle (\mathcal{F}\psi)(\mathcal{F}T), \phi \rangle \end{aligned}$$

lo que prueba la primera igualdad. La otra igualdad se prueba de forma análoga.

Convolución con la función \mathbb{I}_a . Si f es una función para la que la convolución con la distribución \mathbb{I}_a tiene sentido resulta que:

$$f * \mathbb{I}_a = f * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{ka} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f * \delta_{ka} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - ka) \quad (3.28)$$

que es la periodización de f con período a . Es decir, la convolución de una función f con la función \mathbb{I}_a lo que hace es periodizar la función f .

Indiquemos para terminar, que es posible definir, con algunas condiciones, la convolución de dos distribuciones pero no hay una definición de convolución que sea válida para dos distribuciones cualesquiera. Con las definiciones oportunas se prueban, por ejemplo, las igualdades

$$\delta * \delta = \delta, \quad \delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$$

Consideraciones sobre la teoría desarrollada

Antes de llegar aquí te habrás preguntado si vale la pena el esfuerzo realizado. Indudablemente hemos logrado algunos de nuestros propósitos iniciales: dar sentido a la función δ y coherencia a los cálculos con la misma; generalizar la transformada de Fourier para incluir señales sinusoidales y hemos podido introducir la función tren de impulsos que se usa mucho en muestreo de señales. Lo cierto es que las funciones δ , sgn , función escalón unidad y función rampa, así como la distribución valor principal y la función \mathbb{I}_a , junto con sus transformadas de Fourier, son de uso constante en el procesamiento de señales y la teoría de distribuciones nos enseña a manejarlas con seguridad. Pero, además, y esto es importante, la teoría de distribuciones permite que realicemos cálculos con una facilidad sorprendente. Con frecuencia en dichos cálculos el punto de partida y el de llegada son “clásicos” pero en los pasos intermedios se usan herramientas de la teoría de distribuciones. Vamos a ver algunos ejemplos de esto que digo.

Ejemplo 1. Se trata de calcular la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-|t|} \cos(2\pi at)$ donde $a > 0$ es una constante.

La función f es integrable por lo que su transformada de Fourier está bien definida y, en principio, puede calcularse por integración directa lo que, en este caso, es bien fácil. Pero podemos ahorrarnos todos los cálculos si nos damos cuenta de que f es producto de dos funciones $g(t) = e^{-|t|}$ y $h(t) = \cos(2\pi at)$ cuyas transformadas de Fourier son conocidas:

$$\mathcal{F}g(s) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 s^2} \quad \mathcal{F}h(s) = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})$$

El teorema de convolución la transformada de Fourier de f es la convolución de las transformadas de Fourier de g y de h .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}g(u) \mathcal{F}h(s-u) du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}g(u) (\delta(s-u-a) + \delta(s-u+a)) du \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}g(s-a) + \mathcal{F}g(s+a)) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 (s-a)^2} + \frac{1}{1 + 4\pi^2 (s+a)^2} \end{aligned}$$

Hemos obtenido la transformada de Fourier de f sin hacer ninguna integral usando el teorema de convolución y las propiedades de δ .

Ejemplo 2. Tenemos un filtro cuya función de transferencia H es real y par. Se trata de obtener la respuesta del filtro a la señal $f(t) = \cos(2\pi at)$.

La respuesta del filtro a la señal f viene dada en el dominio del tiempo por $g = f * h$ donde h es la respuesta impulso del filtro. La respuesta en el dominio de la frecuencia es $\mathcal{F}h(s) = \mathcal{F}f(s)H(s)$. Como $\mathcal{F}f(s) = \frac{1}{2}(\delta(s-a) + \delta(s+a))$, deducimos que

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}(\delta(s-a) + \delta(s+a))H(s)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}(\delta(s-a)H(a) + \delta(s+a)H(-a))\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}(\delta(s-a) + \delta(s+a))H(a)\right) = \cos(2\pi at)H(a) \end{aligned}$$

Ejemplo 3. El proceso de filtrado de señales, del que ya hemos visto algo, está estrechamente relacionado con el proceso de truncamiento de una señal. Esta es una técnica que consiste en multiplicar la señal de entrada por una *función ventana*. El objetivo de este proceso es suavizar la señal tratando al mismo tiempo de conservar su espectro y eliminando las rápidas oscilaciones en la frecuencia. Es una técnica que se usa con frecuencia antes de calcular la transformada de Fourier discreta de una señal digital. Si f es la señal original y w la función ventana, la señal resultante del truncamiento es $f_w = f w$ y su transformada de Fourier se obtiene por convolución $\mathcal{F}f_w = \mathcal{F}f * \mathcal{F}w$. Una función ventana que se utiliza mucho es la siguiente (ventana de Hamming).

$$w(t) = \begin{cases} \cos^2(\pi t), & |t| \leq 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Calculemos su transformada de Fourier.

$$w(t) = \Pi(t) \cos^2(\pi t) = \Pi(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) \right)$$

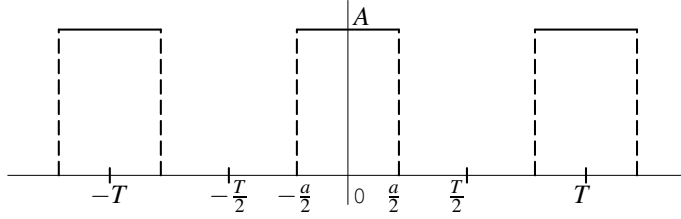
Por tanto su transformada de Fourier es

$$\mathcal{F}w(s) = \left(\text{senc} * \left(\frac{1}{2}\delta(s) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\delta(s-1) + \frac{1}{2}\delta(s+1)\right) \right) \right)(s)$$

esto es

$$\mathcal{F}w(s) = \frac{1}{2} \text{senc}(s) + \frac{1}{4} \text{senc}(s-1) + \frac{1}{4} \text{senc}(s+1)$$

Ejemplo 4. Calcular la serie de Fourier de la función periódica cuya gráfica es la siguiente.

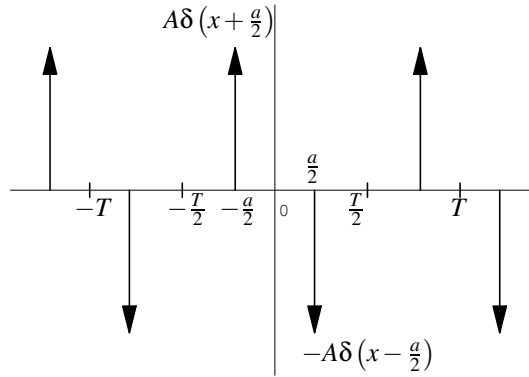


Se trata de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq x \leq -\frac{a}{2} \\ A, & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0, & \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Y además $f(x) = f(x+T)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La función f tiene discontinuidades de salto en los puntos $x - \frac{a}{2} + nT$ con salto igual a A y en los puntos $x + \frac{a}{2} + nT$ con salto igual a $-A$. En los demás puntos es derivable con derivada nula. La derivada generalizada de f viene dada por

$$T'_f = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x + \frac{a}{2} - nT\right) - A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{a}{2} - nT\right)$$



y teniendo en cuenta la igualdad 3.24, obtenemos

$$T'_f = \frac{2A}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{2n\pi}{T}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{T}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right) \right] = -\frac{4A}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi a}{T}\right) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

Pongamos

$$h_n(x) = \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \quad g_n(x) = -\frac{T}{2n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \quad \lambda_n = -\frac{4A}{T} \sin\left(\frac{n\pi a}{T}\right)$$

Como $g'_n = f_n$ se sigue que $T'_{g_n} = T'_{f_n} = T'_{f_n}$. Por tanto, la igualdad anterior se puede escribir como

$$T'_f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T'_{f_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T'_{g_n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_{g_n} \right)' = \left(T_{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n} \right)'$$

Por tanto, las distribuciones T_f y $T_{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n}$ tienen igual derivada y, por tanto, se diferencian en una constante, lo que equivale a afirmar que hay un número λ_0 tal que

$$T_f = T_{\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n}$$

lo que implica que en todo punto de continuidad de f es

$$f(x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n(x) = \lambda_0 + \frac{2Aa}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{T}\right)}{\frac{n\pi a}{T}} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx = 0$$

λ_0 se calcula fácilmente integrando f en el intervalo $[-T/2, T/2]$ resultando $\lambda_0 = Aa/T$. Hemos obtenido finalmente

$$f(x) = \frac{Aa}{T} + \frac{2Aa}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{T}\right)}{\frac{n\pi a}{T}} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

igualdad válida en todo punto de continuidad de f .

Ejemplo 5. Calcular la serie de Fourier de la función periódica f cuya gráfica es la siguiente.

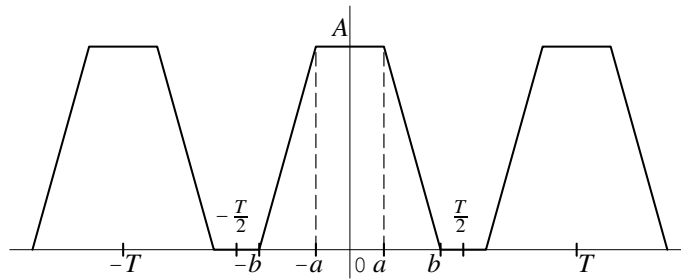
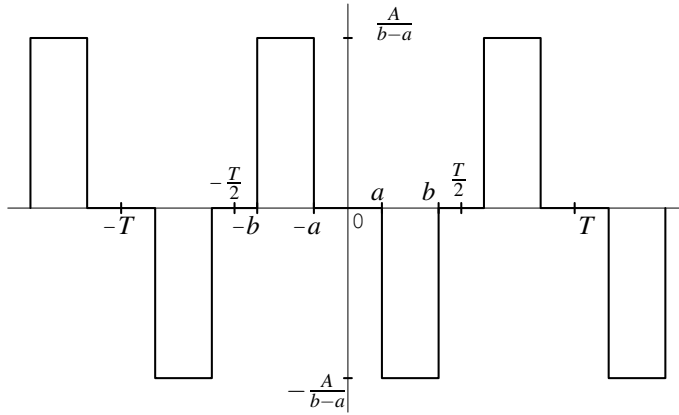


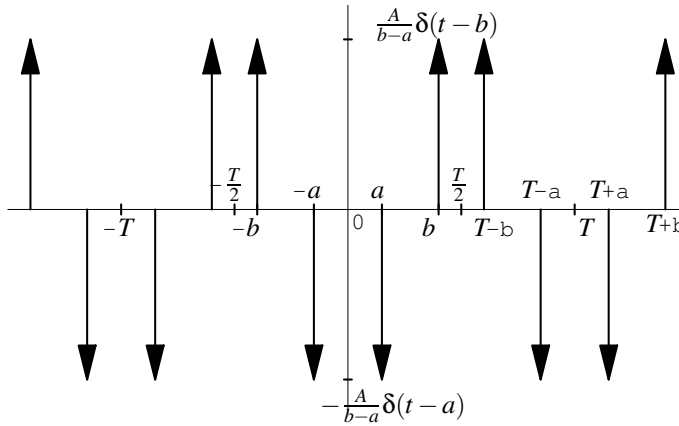
Figura 3.11: Gráfica de f

Observa que f es una función par con período T . Su derivada f' está representada en la gráfica siguiente.

Figura 3.12: Gráfica de f'

Observa que f' es una función impar con período T . En el intervalo $[-T/2, T/2]$ la función f' tiene discontinuidades de salto en los puntos $-b, -a, a, b$ siendo el salto en $-b, b$ positivo de magnitud $\frac{A}{b-a}$ y el salto en $-a, a$ negativo de magnitud $-\frac{A}{b-a}$. Por periodicidad, f' tiene saltos de magnitud positiva en todos los puntos de la forma $\{\pm b + nT : n \in \mathbb{Z}\}$ y tiene saltos de magnitud negativa en todos los puntos de la forma $\{\pm a + nT : n \in \mathbb{Z}\}$.

La derivada segunda f'' está representada en la gráfica siguiente.

Figura 3.13: Gráfica de f''

Se sigue que la derivada generalizada de f' viene dada por

$$\begin{aligned} T'_{f'} &= \frac{A}{b-a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(x \pm b + nT) - \delta(x \pm a + nT)) \\ &= \frac{2A}{(b-a)T} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{2n\pi}{T}(x \pm b)\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{T}(x \pm a)\right) \right) \end{aligned}$$

Poniendo $\beta_n = \frac{2n\pi}{T}$ y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\cos(\beta_n(x+b)) + \cos(\beta_n(x-b)) &= 2\cos(\beta_nb)\cos(\beta_nx) \\ \cos(\beta_n(x+a)) + \cos(\beta_n(x-a)) &= 2\cos(\beta_na)\cos(\beta_nx)\end{aligned}$$

resulta

$$T'_{f'} = \frac{4A}{(b-a)T} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(\beta_nb) - \cos(\beta_na)) \cos(\beta_nx)$$

Razonando como en el ejercicio anterior deducimos que $T'_{f'} = T'_g$ donde

$$g(x) = \frac{4A}{(b-a)T} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(\beta_nb) - \cos(\beta_na)) \frac{1}{\beta_n} \sin(\beta_nx)$$

Por tanto f' y g coinciden (en todo punto de continuidad de f') salvo una constante y como ambas coinciden en $x = 0$ se sigue que

$$f'(x) = \frac{4A}{(b-a)T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_nb) - \cos(\beta_na)}{\beta_n} \sin(\beta_nx)$$

Finalmente, por integración de esta igualdad obtenemos la serie de Fourier de f excepto el primer término de la misma que, al igual que el ejercicio anterior, debe calcularse por separado resultando, después de simplificar, que

$$f(x) = \frac{A}{T}(a+b) + \frac{AT}{\pi^2(b-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_na) - \cos(\beta_nb)}{n^2} \cos(\beta_nx)$$

igualdad válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Los ejemplos anteriores, en los que he sido más cuidadoso con las justificaciones de los cálculos de lo que suele ser usual en la mayoría de los textos, ponen de manifiesto que el formalismo de las distribuciones proporciona una poderosa herramienta de cálculo. Una vez que uno se acostumbra a su uso se adquiere confianza y seguridad en los resultados obtenidos, y si alguna vez surge alguna duda en la corrección de los cálculos siempre puede volverse a las definiciones dadas para comprobarlos.

Para terminar esta ya larga sección vamos a obtener un resultado básico en teoría de muestreo.

Muestreo e interpolación

Vamos a estudiar el siguiente problema:

- Dada una señal $f(t)$ y un conjunto de valores muestrales de la misma, es decir, valores de la señal en un conjunto de puntos $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots$, ¿hasta dónde es posible recuperar valores de la señal $f(t)$ en otros puntos distintos de los valores muestrales?

Esto puede verse como un problema de interpolación: queremos deducir valores de $f(t)$ a partir de unos pocos valores conocidos. Es evidente que no cabe esperar que podamos hacer esto si no se tiene algún conocimiento de la señal; pues por un conjunto finito de puntos dados en el plano pueden pasar infinitas curvas distintas, ¿cómo puedo saber de cuál de ellas proceden mis valores? Está claro que si queremos recuperar la señal o parte de ella a partir de sus valores muestrales es preciso tener algún conocimiento previo de la señal. Por poner un caso sencillo, si sabemos que la señal es un polinomio de grado n entonces $n + 1$ valores la determinan de forma única.

Señales de banda limitada

Supongamos que tomamos muestras de una señal analógica $f(t)$ cada T_s segundos. Representemos por

$$x(n) = f(nT_s)$$

la señal en tiempo discreto obtenida de esta forma. El intervalo de tiempo T (medido en segundos) entre cada dos muestras consecutivas se llama *período de muestreo o intervalo de muestreo*, y su recíproco $\nu_s = 1/T_s$ se llama *frecuencia de muestreo* y es igual al número de muestras por segundo. Supongamos que nuestra señal es una senoide

$$f(t) = A \sin(2\pi \nu t + \phi)$$

en cuyo caso

$$x(n) = f(nT_s) = A \sin(2\pi \nu nT_s + \phi) = A \sin\left(\frac{2\pi n \nu}{\nu_s} + \phi\right)$$

La señal $x(n)$ es una *senoide discreta* de frecuencia

$$\nu_d = \frac{\nu}{\nu_s}$$

Observa que dos senoideas discretas de la forma

$$x_1(n) = A \sin(2\pi \nu_1 n + \phi) \quad x_2(n) = A \sin(2\pi \nu_2 n + \phi) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

cuyas frecuencias se diferencian en un número entero, $\nu_2 = \nu_1 + k$ con $k \in \mathbb{Z}$, son idénticas.

Dado un número cualquiera ν_1 hay un número entero k tal que $-1/2 < \nu_1 - k \leq 1/2$ (basta tomar $k = \max\{q \in \mathbb{Z} : q < \nu_1 + 1/2\}$). Para una fase y amplitud dadas, una senoide con frecuencia ν_1 es idéntica a la senoide (con la misma fase y amplitud) de frecuencia $\nu_2 = \nu_1 - k \in]-1/2, 1/2]$. Debido a ello, para senoideas discretas solamente se consideran frecuencias en el intervalo $] -1/2, 1/2]$.

Volviendo a nuestra senoide discreta $x(n) = f(nT_s)$ con frecuencia $\nu_d = \frac{\nu}{\nu_s}$ la condición $-1/2 < \nu_d \leq 1/2$ es equivalente a

$$-\frac{1}{2T_s} = -\frac{\nu_s}{2} < \nu \leq \frac{\nu_s}{2} = \frac{1}{2T_s}$$

Es decir, la máxima frecuencia de una señal analógica que puede determinarse cuando dicha señal se muestrea con una frecuencia de muestreo $\nu_s = 1/T_s$ es igual a $1/2T_s$.

Lo anterior nos dice que para recuperar una señal analógica sinusoidal de frecuencia ν debemos muestrearla con una frecuencia de muestreo tal que $1/2T_s < \nu$, es decir, $\nu_s < 2\nu$.

Observa que una senoide de frecuencia ν recorre la mitad de su período en $1/2\nu$ segundos. La condición anterior puede escribirse $T_s < 1/2\nu$, es decir el intervalo de tiempo que separa dos muestras consecutivas es menor que la mitad del período, por lo que esta condición garantiza que el número de muestras tomadas en un segundo, $\nu_s = 1/T_s$, es mayor que 2ν por lo que *tiene que haber al menos tres de dichas muestras en un mismo período de la señal*. Pero es que tres muestras *de un mismo período* es todo lo que se necesita para determinar una senoide pues son tres los parámetros que figuran en la expresión $f(t) = A \sin(2\pi\nu t + \phi)$ y es razonable suponer que con tres ecuaciones podríamos calcular los valores de dichos parámetros y para eso necesitamos conocer los valores de la función en tres puntos distintos, lo que está garantizado si tomamos tres muestras en un mismo período.

Acabamos de ver que el muestreo de una señal analógica de la forma

$$f(t) = A \sin(2\pi\nu t + \phi)$$

con una frecuencia de muestreo $\nu_s = 1/T_s$ produce una señal discreta

$$x(n) = A \sin(2\pi\nu_d n + \phi)$$

donde $\nu_d = \nu/\nu_s$ y hemos justificado que para poder recuperar la señal analógica a partir del conocimiento de sus muestras, la frecuencia de muestreo ν_s debe ser suficientemente grande para que $-1/2 < \nu_d < 1/2$. Supongamos que ν_d cumple esta condición y veamos lo que ocurre si las señales

$$f_k(t) = A \sin(2\pi(\nu + k\nu_s)t + \phi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

se muestrean con una frecuencia de muestreo ν_s . Las señales discretas obtenidas son

$$x_k(n) = f_k(nT_s) = A \sin(2\pi(\nu + k\nu_s)nT_s + \phi) = A \sin\left(2\pi\frac{\nu + k\nu_s}{\nu_s}n + \phi\right) = A \sin(2\pi\nu_d n + \phi)$$

es decir, la señal discreta que obtenemos es idéntica a la obtenida anteriormente. Resulta así que muestreando una senoide con una frecuencia de muestreo “pequeña”, donde por “pequeña” se entiende menor que el doble de la frecuencia de la senoide, las muestras que obtenemos pueden ser iguales a las que se obtendrían muestreando otra senoide de frecuencia menor. Cuando esto ocurre se dice que se ha producido un *enmascaramiento* (el término usado en inglés es *aliasing*) de la señal.

En la figura 3.14 puedes ver un ejemplo de enmascaramiento o *aliasing*. Una senoide de frecuencia 17/16 Hz (representada en azul) se ha muestreado con una frecuencia de muestreo de una muestra por segundo. En la figura se han representado 16 muestras y se observa cómo dichas muestras coinciden con muestras de otra senoide de frecuencia 1/16 Hz (representada en color violeta). Por tanto las muestras tomadas nos llevarían a reconstruir esta señal y no la original: se ha producido un enmascaramiento de la señal muestreada por otra señal de menor frecuencia.

Lo dicho para sinusoides se extiende inmediatamente para señales de la forma

$$\sum_{k=1}^n A_k \sin(2\pi\nu_k t + \phi_k)$$

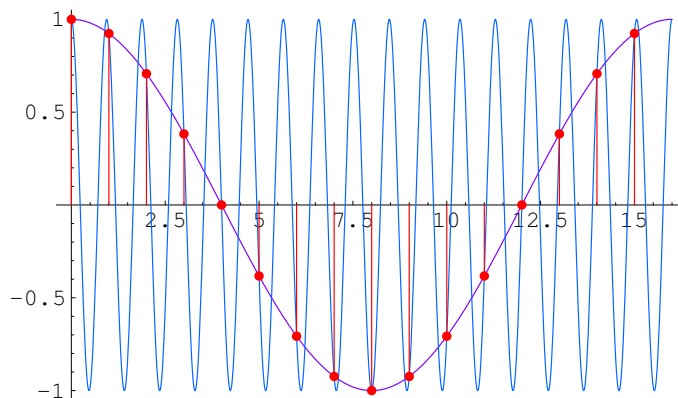


Figura 3.14: Enmascaramiento o aliasing de una señal por otra de menor frecuencia

en las cuales es el armónico de mayor frecuencia v_n el que nos dice cómo debe ser muestreada dicha señal para poder ser recuperada a partir de sus muestras: debemos muestrear con una frecuencia de muestreo v_s mayor que $2v_n$. Haciéndolo así también tenemos la certeza de que estamos muestreando adecuadamente las señales de menor frecuencia que componen la señal dada.

Todo lo dicho tiene sentido para señales que tienen una “máxima frecuencia” cosa que no siempre ocurre pues, al menos en teoría, una señal puede tener componentes de frecuencia arbitrariamente grandes; por ejemplo cualquier señal periódica cuya serie de Fourier tenga infinitos coeficientes no nulos. Esto lleva al siguiente importante concepto.

Definición 3.13. Una señal $f(t)$ se dice que es una señal de *banda limitada* si existe un número $0 < p < +\infty$ tal que $\mathcal{F}f(s) = 0$ siempre que $|s| \geq p/2$. El más pequeño número p para el cual esta condición se cumple se llama la *amplitud de banda* de $f(t)$.

En otros términos una señal es de banda limitada cuando su espectro está acotado.

Interpolación de señales de banda limitada

Todo está preparado ya para justificar que una señal de banda limitada muestreada de forma apropiada puede ser *exactamente* reconstruida a partir de sus muestras. Aunque en principio este resultado parece no tener nada que ver con transformadas de Fourier, convolución de funciones y teoría de distribuciones, nosotros vamos a resolverlo de forma bastante espectacular usando muchos de los resultados vistos anteriormente y, muy especialmente, la función III.

Teorema de muestreo de Shannon y Whittaker

Consideremos una señal $f(t)$ de banda limitada y supongamos que $p > 0$ es tal que $\mathcal{F}f(s) = 0$ para $|s| \geq p/2$. Teniendo en cuenta la igualdad 3.28, periodizamos $\mathcal{F}f$ con III_p (aquí se usa que la señal es de banda limitada, para que esta periodización tenga sentido)

y después volvemos a recuperar $\mathcal{F}f$ multiplicando por la función rectángulo Π_p . Obtengamos así la identidad:

$$\mathcal{F}f = \Pi_p(\mathcal{F}f * \mathbb{I}_p)$$

Ahora todo se reduce a tomar transformada inversa de Fourier en esta igualdad.

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}f(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\Pi_p(\mathcal{F}f * \mathbb{I}_p))(t) && \text{(por 3.27)} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\Pi_p(t) * \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f * \mathbb{I}_p)(t) && \text{(por 3.27)} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\Pi_p(t) * (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(t)\mathcal{F}^{-1}\mathbb{I}_p(t)) \\ &= p \operatorname{senc}(pt) * (f(t) \frac{1}{p} \mathbb{I}_{1/p}(t)) && \text{(por 3.17)} \\ &= \operatorname{senc}(pt) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{p}\right) \delta\left(x - \frac{k}{p}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{p}\right) \operatorname{senc}(pt) * \delta\left(x - \frac{k}{p}\right) && \text{(por 3.26)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{p}\right) \operatorname{senc}\left(p\left(t - \frac{k}{p}\right)\right) \end{aligned}$$

Hemos demostrado el teorema clásico de muestreo que podemos enunciar como sigue:

- Si $f(t)$ es una señal de banda limitada tal que $\mathcal{F}f(s) = 0$ para $|s| \geq p$, entonces

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{p}\right) \operatorname{senc}\left(p\left(t - \frac{k}{p}\right)\right)$$

Observa cómo la anchura de banda determina la mínima frecuencia de muestreo para reconstruir la señal. Si el espectro de la señal está comprendido entre $-\nu_{\max}$ y ν_{\max} , entonces el resultado anterior nos dice que podemos recuperar la señal muestreándola con una frecuencia de muestreo mayor que $2\nu_{\max}$. La frecuencia $2\nu_{\max}$ se llama *frecuencia de Nyquist*.

Espectro de una señal muestreada

Supondremos que $f(t)$ es una señal de banda limitada, siendo $2\nu_c$ la frecuencia Nyquist, es decir, $\mathcal{F}f(s) = 0$ para $|s| \geq \nu_c$. Muestrear la señal $f(t)$ cada a segundos es multiplicar f por la función \mathbb{I}_a como se pone de manifiesto en la igualdad 3.17. Para calcular el espectro de la señal muestreada debemos calcular la transformada de Fourier de $f\mathbb{I}_a$. Tenemos que

$$\mathcal{F}(f\mathbb{I}_a)(s) = (\mathcal{F}f * \mathcal{F}\mathbb{I}_a)(s) = \frac{1}{a} (\mathcal{F}f * \mathbb{I}_{1/a})(s) = \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f\left(s - \frac{k}{a}\right) \quad (3.29)$$

Es decir, la transformada de Fourier de la señal muestreada a intervalos regulares de a segundos es igual a la periodización con período $1/a$ de la transformada de Fourier de la señal (más un cambio de escala debido al factor $1/a$).

Deducimos que

$$\{s \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(f \text{III}_a)(s) \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ s + \frac{k}{a} : \mathcal{F}f(s) \neq 0 \right\} \quad (3.30)$$

Por tanto si s está en el espectro de la señal muestreada entonces $s \pm 1/a$ también está. Podemos expresar esto diciendo que el espectro de la señal muestreada a intervalos regulares de a segundos es un conjunto periódico con período $1/a$. Por tanto si $1/a > 2v_c$ los trasladados del espectro de f no se pisan y el espectro de $f \text{III}_a$ coincide con el espectro de f en el intervalo $[-v_c, v_c]$ lo que explica que podamos recuperar la señal f . Si, por el contrario, $1/a < 2v_c$ entonces los trasladados del espectro de f se solapan y el espectro de $f \text{III}_a$ no coincide con el espectro de f en el intervalo $[-v_c, v_c]$. La frecuencia de Nyquist es justamente el valor de a tal que $1/a = 2v_c$.

3.5. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una de las herramientas fundamentales de la matemática aplicada debido principalmente a su gran utilidad para resolver problemas de valores iniciales.

Definición 3.14. La transformada de Laplace de una función $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ se define como la función de variable compleja

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3.31)$$

Observaciones

- En la definición anterior s es una variable compleja. En lo que sigue escribiremos $s = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.
- Hay una relación fácil de establecer entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace de una función f . Para cada valor fijo de $x \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\mathcal{L}f(x + iy) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(x+iy)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) e^{-iyt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, t) e^{-iyt} dt = \mathcal{F}h_x(y/2\pi) \quad (3.32)$$

donde h_x es la función

$$h_x(t) = \begin{cases} e^{-xt} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- A diferencia de la transformada de Fourier $\mathcal{F}f(s)$ de una función $f(t)$, que cuando existe está definida para todos los valores del parámetro real s , la transformada de Laplace de una función f solamente está definida para ciertos valores de s que constituyen lo que se llama el *dominio de convergencia de la integral* el cual depende en cada caso de la función f . Se demuestra que si la integral 3.31 existe para un valor s_0 entonces también existe para todo s complejo con $\text{Re}(s) > \text{Re}(s_0)$. Esto implica que el dominio de convergencia es en un semiplano.

- Es importante notar que

$$|e^{-st}| = |e^{-xt-iyt}| = |e^{-xt} e^{-iyt}| = e^{-xt} |e^{-iyt}| = e^{-xt}$$

- Se dice que f es de *orden exponencial* si hay números $a \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $t_0 > 0$, tales que

$$|f(t)| \leq M e^{at} \quad (t \geq t_0) \quad (3.33)$$

Teniendo en cuenta que si $c > 0$ la integral $\int_0^{\infty} e^{-ct} dt = 1/c < +\infty$ y la observación anterior, se deduce que si f es una función de orden exponencial que verifica la desigualdad 3.33, entonces la transformada de Laplace de f está definida para todo s con $\operatorname{Re}(s) > a$.

- Algunos autores definen la transformada de Laplace mediante la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

que suele llamarse *transformada de Laplace bilátera* la cual coincide con la transformada de Laplace usual para funciones que se anulan en $] -\infty, 0[$. El dominio de convergencia de la transformada de Laplace bilátera es una banda vertical en el plano.

- Una condición suficiente para que la integral 3.31 exista es que f sea una función de cuadrado integrable, es decir, $f \in L^2(0, \infty)$.
- Suele emplearse la notación $\mathcal{L}(f(t))(s)$ para representar la transformada de Laplace de la función f evaluada en un punto s . Esta notación se presta a veces a confusiones pero es inevitable usarla y así lo haremos en lo que sigue.

Propiedades de la transformada de Laplace

Linealidad

La transformada de Laplace es un operador lineal.

$$\mathcal{L}(\lambda f + \beta g) = \lambda \mathcal{L}f + \beta \mathcal{L}g$$

Teorema de derivación

La transformada de Laplace $\mathcal{L}f(s)$ de una función $f \in L^2(0, \infty)$ es una función derivable en sentido complejo (holomorfa) en su dominio de convergencia y su derivada viene dada por

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(f(t))(s) = -\mathcal{L}(t f(t))(s) \quad (3.34)$$

En particular, $\mathcal{L}f(s)$ es una función continua y, además, se verifica que $\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} \mathcal{L}f(s) = 0$.

Transformada de Laplace de una derivada.

A) Supongamos que f es continua en $]0, +\infty[$, de orden exponencial y tiene derivada f' que es continua a trozos en $[0, +\infty[$. Entonces se verifica la igualdad

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0^+) \quad (3.35)$$

donde $f(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)$.

B) En las mismas hipótesis anteriores, supongamos que f tiene discontinuidades de salto en los puntos $t_1 < t_2 < \dots < t_q$, entonces se verifica que

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0^+) - \sum_{j=1}^q e^{-st_j} (f(t_j^+) - f(t_j^-)) \quad (3.36)$$

C) Supongamos que $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas en $]0, +\infty[$ y de orden exponencial y que $f^{(n)}(t)$ es continua a trozos en $[0, +\infty[$, entonces se verifica que

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n \mathcal{L}(f(t))(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (3.37)$$

Estas propiedades son las responsables de la extraordinaria utilidad que tiene la transformada de Laplace para estudiar ecuaciones diferenciales.

Propiedades de traslación

Si $\mathcal{L}f(s)$ está definida para $\operatorname{Re}(s) > c$ y $a \in \mathbb{C}$, entonces se verifica que

$$\mathcal{L}(f(t))(s-a) = \mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) \quad (\operatorname{Re}(s-a) > c) \quad (3.38)$$

Dado un número $b > 0$ se verifica que

$$\mathcal{L}(H(t-b)f(t-b)) = e^{-bs} \mathcal{L}(f(t))(s) \quad (3.39)$$

donde H es la función escalón unidad.

Teorema de convolución. Sean f y g funciones de orden exponencial y definamos

$$f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

Entonces se verifica que

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f \mathcal{L}g \quad (3.40)$$

Inversión de la transformada de Laplace

Definimos la transformada de Laplace inversa como el operador \mathcal{L}^{-1} que a una función $F(s) = \mathcal{L}f(s)$ hace corresponder la función f .

$$\mathcal{L}^{-1}F = f \iff \mathcal{L}f = F$$

Se usa la notación $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t)$ para indicar la transformada de Laplace inversa de F evaluada en t .

La definición anterior está muy bien pero sirve de muy poco. Si tenemos que aplicar la definición dada para calcular transformadas inversas de Laplace, necesitamos tener alguna práctica para que cuando nos den una función seamos capaces de construir otra función cuya transformada de Laplace sea dicha función. Sin embargo, a pesar de que este procedimiento es muy rudimentario es el que suele seguirse.

Es fácil desarrollar una teoría sencilla para obtener transformadas de Laplace inversas de funciones racionales sin más que descomponerlas en fracciones simples. Esto, junto con el teorema de convolución y las propiedades de traslación, da lugar a unas técnicas que tienen éxito en los casos ordinarios (veremos unos pocos ejemplos en lo que sigue) pero que eluden el auténtico problema que no es otro que el de la inversión de una transformada de Laplace. Es decir, así como para la transformada de Fourier se dispone de un teorema de inversión que nos proporciona una expresión sencilla para la transformada de Fourier inversa, la situación en lo que se refiere a la transformada de Laplace no es tan cómoda. Ello se debe a que la transformada de Laplace convierte funciones complejas de una variable real en funciones complejas *de variable compleja*. Por eso, el teorema de inversión para la transformada de Laplace implica una integración en el campo complejo lo que queda fuera del alcance de estas notas.

Transformada de Laplace de una distribución

La transformada de Laplace de una distribución T es la distribución $\mathcal{L}T$ definida para toda $\varphi \in \mathbb{S}$ por la igualdad

$$\langle \mathcal{L}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{L}\varphi \rangle$$

La transformada de Laplace de la función δ es la función escalón unidad H . Pues

$$\langle \mathcal{L}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{L}\varphi \rangle = \mathcal{L}\varphi(0) = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x) dx = \langle H, \varphi \rangle$$

Como en la teoría de la transformada de Laplace solamente se consideran funciones definidas en los reales positivos y como para todo $t > 0$ es $H(t) = 1$, la igualdad $\mathcal{L}\delta = H$ suele escribirse $\mathcal{L}\delta = 1$.

Es fácil comprobar que la transformada de Laplace de la derivada n -ésima de δ viene dada por

$$\mathcal{L}(\delta^{(n)})(s) = s^n$$

3.6. Ejemplos y aplicaciones

Ejemplo 1. Transformada de Laplace de una exponencial, del seno y del coseno.

Sea $f(t) = e^{at}$ donde $a \in \mathbb{C}$. Tenemos que para $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at})(s) &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-(s-a)t} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_{t=0}^{t=u} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{e^{-(s-a)u}}{s-a} \right) = \frac{1}{s-a}\end{aligned}\quad (3.41)$$

pues para $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$

$$\left| e^{-(s-a)u} \right| = e^{-u \operatorname{Re}(s-a)} \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow +\infty)$$

Deducimos que para $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t))(s) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right)(s) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3.42)$$

Análogamente

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (3.43)$$

Ejemplo 2. Transformada de Laplace de una función polinómica.

Como caso particular del ejemplo anterior para $a = 0$, tenemos que la transformada de Laplace de la función escalón unidad $H(t)$ viene dada por $\mathcal{L}H(s) = \frac{1}{s}$. Usando el teorema de derivación deducimos que

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.44)$$

Este resultado, junto con la linealidad, permite obtener enseguida la transformada de Laplace de una función polinómica.

Además, teniendo en cuenta la propiedad de traslación 3.38, deducimos que

$$\mathcal{L}(e^{at} t^n)(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \operatorname{Re}(s-a) > 0) \quad (3.45)$$

Ejemplo 3. Teniendo en cuenta la igualdad 3.42 y el teorema de derivación y que

$$\frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = -\frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

obtenemos

$$\mathcal{L}(t \sin(\omega t))(s) = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (3.46)$$

Análogamente

$$\mathcal{L}(t \cos(\omega t))(s) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (3.47)$$

Si los resultados anteriores los combinas con las propiedades de desplazamiento y el teorema de convolución podrás calcular fácilmente transformadas de Laplace de productos de polinomios por funciones seno y coseno y exponenciales.

Ejemplo 4. Vamos a calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right)$$

Descomponiendo en fracciones simples tenemos que

$$\frac{s+1}{s^2(s-1)} = -\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s-1}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-1}\right) = -2 - t + 2e^t$$

Ejemplo 5. Vamos a calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right)$$

La descomposición en fracciones simples es

$$\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2} = -\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right) = -\cos t + e^t + t e^t$$

Ejemplo 6. Calculemos $\mathcal{L}(\sin^2(\omega t))$.

Sea $f(t) = \sin^2(\omega t)$. Tenemos que $f'(t) = 2\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \omega \sin(2\omega t)$. Teniendo en cuenta la igualdad 3.35, se verifica que

$$\mathcal{L}(\omega \sin(2\omega t)) = s \mathcal{L}(\sin^2(\omega t))$$

de donde

$$\mathcal{L}(\sin^2(\omega t)) = \frac{\omega}{s} \frac{2\omega}{s^2 + 4\omega^2} = \frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$$

Ejemplo 7. Se trata de calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right)$$

Puede hacerse una descomposición en fracciones simples pero es más rápido si nos damos cuenta de que

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2} \mathcal{L}(t^2) \mathcal{L}(\sin t)$$

y usamos el teorema de convolución (3.40) para deducir que

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)} = \frac{1}{2} \mathcal{L}(t^2 * \text{sent}) \implies \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right) = \frac{1}{2} t^2 * \text{sent} = \frac{1}{2} (t^2 + 2 \cos t - 2)$$

Ejemplo 8. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$y'' + y = \text{sent} \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$$

Es decir, se trata de calcular una solución, $y(t)$, de la ecuación diferencial $y'' + y = \text{sent}$ que verifique las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Notemos $Y(s)$ la transformada de Laplace de la función (desconocida y). Tomando transformadas de Laplace en la ecuación diferencial y teniendo en cuenta la fórmula 3.37 para la transformada de Laplace de una derivada, obtenemos

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

sustituyendo en esta igualdad las condiciones iniciales resulta

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Por una parte

$$\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}(\text{sent}) + \mathcal{L}(\cos t) = \mathcal{L}(\text{sent} + \cos t)$$

Y por otra

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} \frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2} \mathcal{L}1 \mathcal{L}(t \text{sent}) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(1 * t \text{sent})$$

Por tanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \text{sent} + \cos t + \frac{1}{2} 1 * t \text{sent} = \text{sent} + \cos t + \frac{1}{2} \int_0^t u \text{sen } u \, du \\ &= \text{sent} + \cos t + \frac{1}{2} (-t \cos t + \text{sent}) = \cos t - \frac{1}{2} t \cos t + \frac{3}{2} \text{sent} \end{aligned}$$

Puedes comprobar que, efectivamente, esa es la solución correcta.

Ejemplo 9. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + y = \begin{cases} \text{sent}, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de la ecuación y poniendo $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$, tenemos

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \int_0^\pi e^{-st} \text{sent} \, dt = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

Por tanto

$$Y(s) = \frac{1 + e^{-\pi s}}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2 + 1)^2}$$

En el ejemplo anterior hemos visto que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$$

teniendo en cuenta también la igualdad 3.39, deducimos que

$$y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) + H(t - \pi) \left(\frac{1}{2}(\sin(t - \pi) - (t - \pi) \cos(t - \pi)) \right)$$

es decir

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t), & 0 \leq t \leq \pi \\ -\frac{1}{2}\pi \cos t, & t > \pi \end{cases}$$

Ejemplo 10. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y' + z' + y + z &= 1 \\ y' + z &= e^t \end{aligned} \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 2$$

Tomando transformadas de Laplace y poniendo $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$, $Z(s) = \mathcal{L}z(s)$, obtenemos

$$\begin{aligned} sY(s) + 1 + sZ(s) - 2 + Y(s) + Z(s) &= \frac{1}{s} \\ sY(s) + 1 + Z(s) &= \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones deducimos que

$$Y(s) = \frac{-s^2 + s + 1}{s(s-1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

y tomando transformadas inversas obtenemos que

$$y(t) = 1 - 2e^t + te^t, \quad z(t) = 2e^t - te^t$$

Ejemplo 11. Consideremos la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t) \quad (3.48)$$

y condiciones iniciales

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (3.49)$$

La solución de 3.48 que satisface 3.49 se llama la *solución de estado estacionario*. Tomando transformadas de Laplace en 3.48 obtenemos

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(f(t))$$

esto es

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{\mathcal{L}(f(t))}{Q(s)}$$

donde $Q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$.

Supongamos que $g(t)$ es una función tal que

$$\frac{1}{Q(s)} = \mathcal{L}(g(t))$$

Entonces

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(f * g)(t)$$

por lo que

$$y(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du \quad (3.50)$$

Teniendo en cuenta que

$$Q(s)\mathcal{L}(g(t)) = 1$$

es decir

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(\delta(t))$$

podemos considerar que $g(t)$ es la solución de estado estacionario de la ecuación

$$g^{(n)} + a_{n-1}g^{(n-1)} + \dots + a_1g' + a_0g = \delta(t)$$

La función $g(t)$ se llama *respuesta impulso* del sistema y su conocimiento permite obtener la respuesta del sistema a cualquier señal $f(t)$ por medio de la convolución dada por 3.50.

Un caso particularmente sencillo es cuando el polinomio $Q(s)$ tiene todas sus raíces simples. Si éstas son α_j ($1 \leq j \leq n$), entonces se prueba con facilidad que

$$y(t) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{Q'(\alpha_j)} \int_0^t f(u) e^{\alpha_j(t-u)} du$$

Ejemplo 12. Las ecuaciones en diferencias finitas lineales pueden resolverse con ayuda de la transformada de Laplace. Veamos un ejemplo.

Se trata de resolver la ecuación

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

Para ello definamos

$$y(t) = a_n \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Con lo cual la ecuación se convierte en

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0 \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (3.51)$$

Tomando transformadas de Laplace tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(y(t+2)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} y(t+2) dt = [u = t+2] = \int_2^{\infty} e^{-s(u-2)} y(u) du = \\
 &= e^{2s} \int_0^{\infty} e^{-su} y(u) du - e^{2s} \int_0^2 e^{-su} y(u) du \\
 &= e^{2s} \mathcal{L}(y(t)) - e^{2s} \int_0^1 e^{-su} y(0) du - e^{2s} \int_1^2 e^{-su} y(1) du \\
 &= e^{2s} \mathcal{L}(y(t)) - \frac{e^s}{s} (1 - e^{-s})
 \end{aligned}$$

Análogamente

$$\mathcal{L}(y(t+1)) = e^s \mathcal{L}(y(t))$$

Con lo que la ecuación 3.51 se convierte en

$$e^{2s} \mathcal{L}(y(t)) - \frac{e^s}{s} (1 - e^{-s}) - 3e^s \mathcal{L}(y(t)) + 2\mathcal{L}(y(t)) = 0$$

de donde fácilmente se obtiene que

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 2e^{-s})} - \frac{1}{s}$$

Teniendo ahora en cuenta que para $a > 0$ y notando $E(t)$ la función *parte entera* se verifica que

$$\mathcal{L}(a^{E(t)}) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})} \quad (\operatorname{Re}(s) > \max\{0, \log a\})$$

concluimos que

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(2^{E(t)}) - \mathcal{L}1 = \mathcal{L}(2^{E(t)} - 1)$$

de donde resulta finalmente

$$a_n = 2^n - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$